Einsatzmöglichkeiten eines grafikfähigen Taschenrechners im Lernbereich „Funktionen“ in Klasse 10

Schriftliche Arbeit im Fach:

Mathematik

vorgelegt von

Tino Hempel

am Staatlichen Seminar für das Höhere Lehramt an

Gymnasien in Chemnitz

Chemnitz, den 28.08.1997

Vorwort

Seit Schuljahr 1996/97 wird an den Schulen im Freistaat Sachsen der graphikfähige Taschenrechner (GTR) ab Klasse 8 genutzt. Damit ist Sachsen das erste Bundesland, welches sich für den Einsatz eines solch fortschrittlichen Rechenhilfsmittels entschlossen hat. Doch ist der GTR wirklich nur ein modernes Rechenhilfsmittel oder bietet er auch eine Chance, Mathematikunterricht anschaulicher, lebendiger oder gar einfacher zu gestalten? Es ist kaum zu beschreiben, wie motiviert die Schüler sind, wenn sie ihren GTR in der Hand halten. Da ist in den seltensten Fällen Angst vor der Technik oder der Mathematik zu spüren, jedenfalls nicht bei den Schülern! Lehrern, die Bedenken gegen das neue Hilfsmittel haben, möchte ich auf folgenden Ausspruch des Herausgebers des „Lambacher-Schweizer“, Prof. August Schmid, verweisen, welches sich zwar auf den Computer bezieht, jedoch auch für den GTR zutrifft:

> *„Als der Blitzableiter erfunden wurde oder als der Regenschirm in Gebrauch kam, da gab es zunächst auch erhebliche Bedenken gegen diese menschlichen Ausmaßungen. Inzwischen haben wir Blitzableiter und Regenschirm verdaut. Wir werden auch den Computer verdauen; die derzeitigen Verdauungsschwierigkeiten werden sich geben.“* ([3], S. 5)

Vielleicht wird dieses Zitat in ein paar Jahren exakt anwendbar sein, wenn sich nämlich herausstellt, daß der GTR nur ein Zwischenschritt auf dem Weg zum Schüler-Laptop mit Algebra-System á la DERIVE war. Doch dies ist nur Spekulation.

Herzlich danken möchte Herrn Dr. H.-P. Linke für seine Hinweise und die Bereitstellung der notwendigen Ausgaben der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, Herrn F. Rost für sein „offenes Ohr“ und den Schülerinnen der Klasse 10 für die Geduld bei meinen Experimenten zum GTR.

Chemnitz, den 28.08.1997 Tino Hempel

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Überlegungen

1.1 Themenbegründung

In meiner Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung beschäftigte ich mich intensiv mit den Mathematikprogrammen DERIVE und MathCad. Meine Motivation war die Anwendung dieser Kenntnisse im Mathematikunterricht. Die Unterrichtspraxis lehrte, daß es logistisch, zeit- und programmtechnisch äußerst schwierig ist, Schüler während des Unterrichts an den PC zu bringen. Schon aus diesem Grund interessierte mich der graphikfähige Taschenrechner. Er schien mir das geeignete „Computerersatz-Hilfsmittel“ zur Vermittlung bestimmter mathematischer Einsichten zu sein.

In der Diskussion mit Kollegen erkannte ich, daß es um mehr ging, als nur um ein neues Rechenhilfsmittel. Man nannte Aspekte, wie etwa die Änderung der Aufgabenstellung, der Umgang mit den Näherungswerten des Taschenrechners, der Verzicht auf die Fertigkeiten des Zeichnens von Graphen etc., die untersuchenswert klangen. Durch eine Stundenplanänderung wurde es mir möglich, den Lernbereich „Funktionen“ in Klasse 10 in einer Wochenstunde mit dem GTR zu unterrichten.

Ich beantragte das Thema aber auch, um mein persönliches Interesse für Technik, insbesondere Rechentechnik und Computer einzubringen. Im Kopf hatte ich mir schon einen Einstieg in den Umgang mit dem GTR überlegt. Ausgehend von der geschichtlichen Entwicklung der Rechentechnik von den antiken Rechensteinen über Abakus, Napier-Stäbchen, Rechenstab, den ersten Maschinen von Schickard, Pascal und Leibniz bis hin zu Zuses Computer und schließlich der Taschenrechner mit integrierten Schaltkreisen, schien mir dies eine ideale Motivation zur Einführung des GTR in den Schulunterricht zu sein. Leider war es sowohl zeitlich als auch organisatorisch nicht möglich, den Einstieg so zu wählen. Außerdem begeisterten sich die Schüler für das neue Medium selbst, so daß eine weitere Motivation nicht notwendig war.

1.2 Themenanalyse, Problemstellung und Ziel

Einsatzmöglichkeit bedeutet zweierlei: die Erläuterung von *Einsatzstellen* und die Erläuterung von *Einsatzvarianten*. Die Untersuchung von Einsatzmöglichkeiten erschöpft sich somit *nicht* in Nennung einiger Lehrplanstellen, an denen der GTR Anwendung finden kann. Es gilt auch das „Wie“ zu erforschen. Dazu schloß ich mich den Diskussionen der Kollegen an und notierte einige auftretende Problemfragen:

- Was kann der GTR überhaupt und wo liegen seine Grenzen?
- Warum setze ich den GTR ein?
- Welche Auswirkungen hat sein Einsatz auf die Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts?
- Welche Konsequenzen sind bezüglich der Methodik/Didaktik zu ziehen?
- Für welche Unterrichtsinhalte läßt sich der GTR verwenden?
- Wie reagieren Schüler/Lehrer auf das neue Medium?
- Welche Probleme haben sie um Umgang mit dem GTR?

Um die Fragen und Probleme zu analysieren, unterteile ich zunächst in vier Zielfragen, die im Laufe der Hausarbeit konkretisiert werden:

1. *Wo* kann der GTR unter Berücksichtigung der Lehrplanthemen günstig eingesetzt werden?
2. *Wie* kann der GTR an obigen Stellen eingesetzt werden, d.h. welche Methoden bieten sich an?
3. *Warum* ist es günstig, den GTR an diesen Stellen einzusetzen, d.h. welche allgemeinen Ziele und welche Unterrichtsziele werden dadurch berücksichtigt?
4. *Was* kann der GTR überhaupt?

Die erste Frage stellt zweifelsfrei das Thema der Hausarbeit im engeren Sinne dar. Sie läßt sich jedoch nur sinnvoll beantworten, wenn die weiteren Fragen berücksichtigt werden. Die Diskussionen in der Fachliteratur beginnen i.d.R. mit den „Was“- und „Warum“-Fragen und so möchte ich meine theoretischen Ausführungen in gleicher Weise einleiten.

1.3 Literaturanalyse

Was kann der GTR?

„Grafikfähige Taschenrechner können im wesentlichen all das, was wissenschaftliche Taschenrechner auch können, und darüber hinaus verfügen sie eben über grafische Fähigkeiten, oft aber auch noch über andere Leistungsmöglichkeiten. Der von mir verwendete grafikfähige Taschenrechner ist z.B. programmierbar, kann Matrizen rechnen (bis zum Typ (6; 6)), ermöglicht statistische Berechnungen (einschließlich einer grafischen Auswertung), verfügt über besondere mathematische Funktionen wie Zufallszahlen und Fakultät und ermöglicht natürlich vielfältige grafische Operationen ...“ ([9]).

Ist der Einsatz des GTR im Gymnasium überhaupt notwendig?

Im Bildungs- und Erziehungsauftrag des Gymnasiums wird gefordert, daß das Gymnasium den Schüler „... auch dazu befähigt, den Anforderungen einer modernen Berufs- und Arbeitswelt gewachsen zu sein“ ([4], S. 6). Meines Erachtens impliziert diese Forderung die Notwendigkeit des Einsatzes von graphikfähigen Taschenrechnern. Das Gymnasium kann sich nicht länger den modernen Medien verschließen. Wenn es schon nicht möglich ist, Schülern einen durchgängigen Informatikunterricht zu ermöglichen, so sollte mindestens die Vorbereitung auf den Computerumgang erfolgen. Dabei kann der GTR einen Beitrag zur informationstechnologischen Grundbildung der Schüler leisten, bietet er doch Menüsteuerung, ZOOM-Technik, eine einfache Programmiersprache, Datenübertragung und Programmierung. Dennoch stehen diesen Vorteilen auch Nachteile gegenüber. So bringt die Einführung GTR keinen direkten Wissenszuwachs und kostet außerdem viel Zeit. Dennoch überwiegen meines Erachtens die Vorteile und man sollte diese Zeit investieren, sie ist dort sicherlich gut aufgehoben.

Welche Konsequenzen hat der GTR auf die allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts?

Die Notwendigkeit des GTR im Mathematikunterricht folgt weniger aus der Tatsache heraus, daß er die Möglichkeit bietet, noch mehr Funktionen durch den Schüler untersuchen zu lassen, sondern, weil der Schüler durch die Einbeziehung des GTR den Impuls zum eigenen Handeln sehen kann. Dieser könnte dann die Kette „sehen →

vermuten → fragen → beweisen“ zur Folge haben. Die Umsetzung des Impulses ist nur dann möglich, wenn die Art der Aufgabenstellung, die Art des Unterrichts und auch die Art des Unterrichtens eine Veränderung erfährt, also wenn die Ziele und Methoden des Mathematikunterrichts akzentuiert werden.

In den Vordergrund rückt nun die Realisierung wichtiger Ziele wie

- die Befähigung der Schüler zum algorithmischen Arbeiten, u.a. durch Vertiefung des Verständnisses für grundlegenden Begriffe wie z.B. Gleichung, Lösung einer Gleichung, Funktion, Nullstelle einer Funktion und ihrer Beziehungen untereinander,

- die Befähigung der Schüler zum heuristischen Arbeiten, u.a. durch Entwicklung von Fähigkeiten im mathematischen Experimentieren und im Analysieren von Aufgaben, im Beschreiben von Sachverhalten mit Hilfe von Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssystemen oder Funktionen sowie im Interpretieren von Wertetabellen bzw. graphischen Darstellungen,

- die Befähigung der Schüler zur Nutzung von Näherungsverfahren, u.a. durch Entwicklung von Fähigkeiten im Analysieren von Aufgaben, im systematischen Probieren, im vollständigen Durchmustern, im Intervallschachteln, im Verfahren des graphischen Lösens, in Iterationsverfahren.

Andererseits werden „... gewisse Fertigkeiten wie das Berechnen von Termwerten, das Lösen von bestimmten Gleichungstypen, das Aufstellen von Wertetabellen, das Zeichnen von Graphen in ihrer Bedeutung zweifellos abgewertet.“ ([6], S. 130) Das heißt jedoch nicht, daß sie gänzlich aus dem Unterricht entfallen. Für das tiefere Verständnis ist es schon notwendig, daß der Schüler diese oben genannten Tätigkeiten selbst durchführt. Der GTR bietet sogar die Motivation z.B. auf Millimeterpapier zu arbeiten, wie in [8] gezeigt. Neben genannter Abwertung birgt der GTR auch allgemeine Gefahren. So ist dem Verlust mathematischer Grundfertigkeiten, dem blinden Drauflosprobieren und der Verkümmerung von Kontrollfähigkeiten entgegenzuwirken, indem den Schülern bewußtgemacht wird, was algorithmische und heuristische Verfahren sind und bezwecken (s. auch [6]).

Wie lassen sich die allgemeinen Ziele erreichen?

Das *heuristische Arbeiten* „... wird im wesentlichen von der Durchführung eines ‘Experimentes’ bestimmt. Heuristische Strategien, Prinzipien und Programme helfen bei der Auswahl, Planung und Realisierung des Experimentes. Heuristisch-experimentelles Arbeiten als Form des ‘entdeckenden Lernens’ fordert die Schüler im Beobachten, Erkunden, Probieren und Fragen im gesamten Problemlösungsprozeß.“ ([10], S. 400) Somit erhält der Mathematikunterricht einen „naturwissenschaftlichen Touch“, den ich begrüße, ohne dabei zu vergessen, das Mathematik keine Naturwissenschaft ist. D.h. nach dem Experiment muß die Klärung und Aufdeckung von Zusammenhängen stehen, weil nur die Mathematik solche Zusammenhänge aufdecken kann. (s. auch [3], S. 12) Dem Schüler muß die Chance gegeben werden, „Entdeckungen“ zu machen, Vermutungen aufzustellen, unterschiedliche Lösungswege zu testen und zu bewerten. Gerade hier kann der GTR als „Impulsgeber“ dienen.

Das *algorithmische Arbeiten* und damit „... Algorithmen verschiedener Strukturen sind häufig wesentliche Bestandteile (Ziel und Mittel) solcher Experimente ... In Abhängigkeit von gegebenen Problemstellungen und verwendeten (Taschen-) Rechnern suchen die Schüler nach günstigen Darstellungsformen für diese Algorithmen, modifizieren bereits bekannte algorithmische Vorschriften oder bewerten diese.“ ([10], S. 402) Höhepunkt des algorithmischen Arbeitens wäre die Darstellung des Algorithmus in Form eines Taschenrechnerprogrammes.

Die Nutzung von *Näherungsverfahren* erweitert die Möglichkeit des Lösens von Aufgaben, bei denen kein direktes Lösungsverfahren zur Verfügung steht (z.B. Gleichungen höheren Grades, Exponentialgleichungen, etc.). Die Benutzung von Iterationsverfahren wird jedoch erst in SII empfohlen. Das grafische Lösen hingegen wäre bereits in der SI einsetzbar (z.B. Lösen der Gleichung $10^x - 3\cdot x + 2 = 0$: äquivalentes Umformen zu $10x = 2 - 3\cdot x$, Schnittstelle der Funktionen $f(x) = 10^x$ und $g(x) = 2 - 3\cdot x$ ist gesuchte Lösung). Durch den Einsatz verschiedener Verfahren (rechnerisch, graphisch, mit GTR, etc.) muß der Schüler dann selbständig das geeignete und effektive auswählen, richtig anwenden, dabei Genauigkeitsbetrachtungen und Schlüsse über die Lösungsmannigfaltigkeit ziehen.

Welche speziellen Verwendungsmöglichkeiten gibt es?

Nicht immer setzt man den Rechner zum Zwecke des heuristischen oder algorithmischen Arbeitens ein. Damit die GTR eben nicht nur technische Hilfsmittel sind, „... sondern Impulsgeber, die zum einen Denkprozesse veranschaulichen, die zum anderen neue Denkprozesse initiieren“ ([10], S. 400), ergeben sich weitere Einsatzmöglichkeiten:

- Nutzen als *Hilfsmittel zum mathematischen Experimentieren* unter Beachtung, daß der GTR keine „Beweiskraft“ hat, d.h. analytische Begründungen sind notwendig,
- Nutzung als *„Impulsgeber“* beim „Entdecken“ von Zusammenhängen unter Einbeziehung von Methoden heuristisch-experimentellen Vorgehens,
- Nutzen als *„Visualisierer“*,
- Nutzen als *Kontrolle* während oder nach Bearbeitung einer Aufgabe (auch unabhängig vom Lehrer),
- Nutzen als *„Motivierer“*.

Einige dieser Varianten werden i.d.R. vom Schüler selbständig, z.T. intuitiv und ohne Lehrerzutun ausgeführt.

Einsatzempfehlungen der Literatur

Die Fachliteratur zeigt typische Einsatzabschnitte auf. Diese sind i.d.R. nicht für den Lernbereich „Funktionen“ in Klasse 10, dennoch lassen sich Elemente der Beschreibungen in den Unterricht einbauen.

Am häufigsten wird der GTR in der Literatur zum mathematischen Experimentieren als „Impulsgeber“ eingesetzt, so etwa bei der Untersuchung von quadratischen Funktionen hinsichtlich der Darstellungsbereiche und hinsichtlich des Einflusses von Parametern auf den Verlauf der Funktionsgraphen (s. [8]), bei der allgemeinen Betrachtung von Verknüpfungen von Funktionen einschließlich Fallunterscheidung (s. [12]). „Die Möglichkeit der Speicherung und der gleichzeitigen Darstellung mehrerer Funktionen und ihrer Graphen erlauben z.B., vergleichende Betrachtungen zum Einfluss bestimmter Funktionsparameter auf den Verlauf von Graphen, Untersuchungen von besonderen ‘Stellen’ und Punkten sowie von Symmetrie- und Monotonieeigenschaften mit Hilfe des GTR durchzuführen.“ (s. [17])

Die Kurvendiskussionen wird in der SII neben statistischen und geometrischen Untersuchungen als das klassische Beispiel zum algorithmische Arbeiten besprochen (s. [11]).

Eine weitere Einsatzmöglichkeit diskutiert die Literatur in Form des Vergleichs „Aufgaben mit und ohne GTR gelöst“. So findet man in [7] Varianten zur Untersuchung der Darstellung linearer Funktionen bzgl. Anstieg und Nullstellen, in [11] den Vergleich von Kurvendiskussionen mit und ohne GTR und schließlich in [15] die Darstellung von Lösungsvarianten von Extremwertaufgaben ohne Nutzung der Differentialrechnung. So bietet der Rechner auch eine Chance zur vorzeitigen Behandlung gewisser Stoffelemente, welches zwar eine große Motivation bei den Schülern hervorruft, jedoch stofflich nicht leicht zu verarbeiten ist.

Als eine weitere Stelle findet man in der Literatur den Einsatz des GTR zur Diskussion der Genauigkeit und Näherung. So wird in [11] die Bestimmung von Funktionswerten durch näherungsweises Ablesen beschrieben, ähnliches findet sich in [9].

1.4 Der Lernbereich „Funktionen“

Lehrplananalyse

Der Lernbereich „Funktionen“ in Klasse 10 ist mit vorgegebenen 10 Stunden stofflich sehr überfüllt. Er schreibt zum einen die Systematisierung und Festigung der seit Klasse 8 eingeführten Funktionstypen nach festgelegten Merkmalen unter Berücksichtigung der Variation von Parametern sowie der Verknüpfung von Funktionen vor. Zum anderen fordert er die überblicksartige, nichtsystematische Behandlung der Darstellungsmöglichkeiten von mehrdeutige Zuordnungen. Damit dient der erste Teil der Vorbereitung auf Kurvenuntersuchungen mittels Differentialrechnung in Jahrgangsstufe 11 und der zweite Teil dem Erleben und der Ästhetik gewisser Elemente der Mathematik. Zusammengefaßt ergeben sich folgende Ziele für den Lernbereich:

- Schüler systematisieren und festigen ihr Wissen über die bekannten Funktionstypen,
- Schüler vertiefen ihr Verständnis für grundlegende Begriffe (Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich, etc.) und deren Beziehungen untereinander,

- Schüler vertiefen ihre Einsicht in funktionale Zusammenhänge durch „Modellierung realer funktionaler Beziehungen unter Einbeziehung dynamischer Aspekte, durch Variieren von Parametern und Verknüpfen von Funktionen sowie bei der Ermittlung der Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion“ ([5], S. 8),
- Schüler erhalten einen Einblick in unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten für mehrdeutige Zuordnungen unter dem Aspekt der Ästhetik,
- „Schüler erweitern ihre Fähigkeiten im zweckmäßigen Einsatz technischer Hilfsmittel und im Umgang mit grafischen Darstellungen“ ([5], S. 8).

Der von mir verwendete und nach den Stunden überarbeitete Stoffverteilungsplan mit Hinweis auf das Medium GTR findet sich im Anhang. Um die Bedeutung des ersten Teils zu vergrößern, erhielt dieser 9 Unterrichtseinheiten, der zweite 3 Unterrichtseinheiten.

Variantendiskussion unter Berücksichtigung des GTR

<u>Abschnitt „Systematisierung“:</u>

Variante 1:

Nach der Reaktivierung des Begriffs „Funktionen“ und der Darstellungsformen von Funktionen bildet man resultierend aus der vorhandenen Klassifizierung der Funktionen ein Merkmalssystem, welches die Grundlage der Untersuchungen der Funktionstypen ist. Dabei wird jeweils ein Funktionstyp nach diesem System untersucht und an geeigneten Stellen der Einfuß von Parametern auf der Verlauf der Graphen des Funktionstyps diskutiert. Eine Abwandlung der Variante wäre, nicht „Funktionstypenweise“, sondern „Merkmalsweise“ vorzugehen. Bei der Untersuchung wird die Selbständigkeit der Schüler systematisch gesteigert, denn ausgehend von der Merkmalerarbeitung und Diskussion des ersten Funktionstyps im Unterrichtsgespräch erfolgen die weiteren Untersuchungen in Partnerarbeit, Gruppenarbeit und schließlich dem Expertengruppenverfahren. Der GTR dient als Hilfsmittel innerhalb der Untersuchung und wird darin experimentell sowie zur Kontrolle eingesetzt. Die Untersuchung selbst findet nach einem eingangs festgelegten Algorithmus statt. Diese Methode versucht alle im Schema auf Seite 13 beschriebenen Einsatzmöglichkeiten zu nutzen. Das setzt allerdings einen sicheren Umgang mit dem GTR voraus.

Variante 2:

Nach der oben beschriebenen Einführung erfolgt die Systematisierung mit geringen Einsatz des GTR. Er wird primär nach der theoretischen Diskussion (Unterrichtsgespräch, Schülervortrag, Lehrervortrag) der Merkmale, die aufgrund des bereits vorhandenen Wissens der Schüler geführt wird, zur Visualisierung und Kontrolle eingesetzt bzw. zum Abarbeiten von Aufgaben aus diesem Bereich nach einem algorithmischen Plan. Diese Variante spart Zeit. Allerdings verschenkt man Chancen zum mathematischen Experimentieren, zur Entwicklung der Selbständigkeit, zum Üben von Kontrolle, Visualisierung u.ä.

Variante 3:

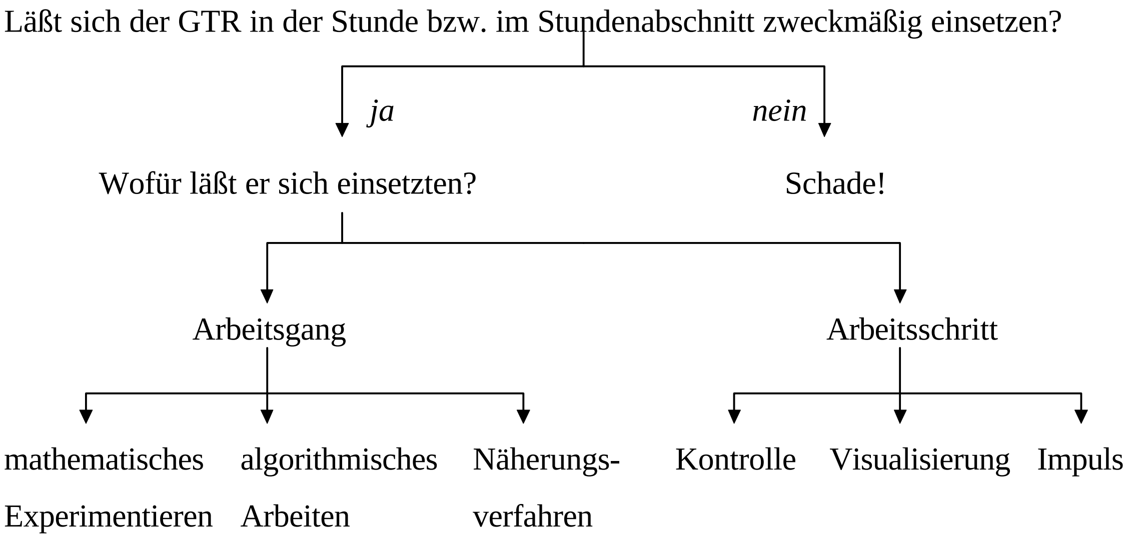
Der Lernabschnitt wird primär in Gruppenarbeit und im Expertengruppenverfahren behandelt, wobei zwei Aufgabenstellungen existieren. Die Erarbeitung der Systematisierung erfolgt unter dem Motte „Mit und ohne GTR gelöst“, wobei die Gruppen sich darin abwechseln. Anschließend findet ein Vergleich der fachlichen wie arbeitstechnischen Erkenntnisse statt. Vorteile liegen in der Selbständigkeit und im mathematischen Experimentieren. Der Schüler erfährt verschiedene Möglichkeiten an ein Problem heranzugehen. Diese Methode verlang in ihrer Durchführung viel Zeit und einen sicheren Umgang mit dem GTR.

Abschnitt „Mehrdeutige Zuordnungen“:

Da der Lehrplan keine systematische Behandlung des Themas fordert, sehe ich den Einsatz des GTR primär als Visualisierer von ausgewählten Kurven unter dem Aspekt der Ästhetik. Um ein wenig mathematisches Experimentieren einzubringen, sollte der Schüler durch Variation von Parametern selbst interessante Kurven erzeugen. Eine genaue Beschreibung der Variante findet sich im Praxisteil.

1.5 Untersuchungsfragen

Durch die Analyse der Fachliteratur können die eingangs gestellten Hauptfragen konkretisiert werden. Insbesondere scheint mir die „Warum“-Frage in der Diskussion hinreichend beantwortet. Die erste und zweite Frage fließen zusammen, und es ergibt sich folgendes konkretes Untersuchungsschema:



Unter Nutzung von Elementen der oben beschriebenen Varianten, werde ich in geeigneten Stunden unter Berücksichtigung des Schemas Einsatzmöglichkeiten testen.

2 Unterrichtspraxis

2.1 Voraussetzungen

Die Stunden wurden von mir in einer Klasse 10 bestehend aus 25 Mädchen mit sprachlichem Profil gehalten. Die Schüler[1] benötigten viel Zeit zur Stofferfassung und -verinnerlichung. Ihnen fiel es schwer, den in der letzten Stunde vermittelten Stoff mit Neuem zu verbinden, Zusammenhänge zu sehen oder logische Schlüsse zu ziehen. Besonders zu zurückliegenden Schuljahren wurden nur mühevoll Beziehungen gesucht und gefunden. Ein großer Nachteil bestand darin, daß die Behandlung des Lernbereichs mit nur einer Wochenstunde erfolgte. Außerdem hatten die Schüler noch Probleme beim Umgang mit dem GTR vom Typ Casio CFX 9850G, da sie das Gerät erst in der zweiten Unterrichtseinheit erhielten. Glücklicherweise wurde kurz vor Ende des Schuljahres auch das noch fehlende Grafik-Display für den Overhead-Projektor nachgeliefert. Lehrbücher standen für diesen neuen Lernbereich nicht zur Verfügung.

2.2 Unterrichtsverlauf

Die Darstellung des Unterrichtsverlaufs unterteilt sich in zwei Rubriken. Die erste beschreibt kurz den eigentlichen Stundenablauf, die zweiten resümiert den Einsatz des GTR in dieser Einheit. (Hinweis zum Nachvollziehen der Beispiele: Die Klasse führt zu Beginn der Stunde immer einen RESET aus, so daß der Standardsichtbereich auf $-6{,}3 \le x \le 6{,}3$ und $-3{,}1 \le y \le 3{,}1$ eingestellt ist.)

<u>1. Begriff Funktion und Darstellungsformen von Funktionen</u>

Nach Vorstellung meiner Person und Zielorientierung wurde das Einstiegsbeispiel für Zuordnungen, die Gebührenordnung der Post für Briefe diskutiert und zum Funktionsbegriff übergeleitet. Die Definition des Begriffs „Funktion“ untermauerten die Schüler durch die Angabe von selbst gewählten Beispielen. Zur Identifizierung prüften sie einige von mir aufgezählte Alltagszuordnungen. Anschließend wurde eine Übersicht über die Darstellungsformen von Funktionen einschließlich einiger Beispiele erstellt. Als abschließende schriftliche Übung mußten die Schüler zu gegebenen Funktionen andere

[1] Ohne Absicht der Diskriminierung möchte ich im folgenden immer von Schülern sprechen, obwohl es in dieser schon femininen Klasse korrekterweise Schülerinnen heißen müßte.

Darstellungsformen finden. Dies erwies sich besonders bei der verbalen Formulierung als schwierig.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als „Visualisierer“ bei den Darstellungsformen „Graph“, „Wertetabelle“ und „Funktionsgleichung“

2. Funktionstypen, Merkmale von Funktionen

Nach einer mündlichen Wiederholung erhielten die Schüler den Auftrag zwei Tabellen zu erstellen; die erste mit Funktionstypen und die zweite mit Merkmalen von Funktionen (lt. [5]: Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Monotonie, Nullstellen, Extremstellen, Polstellen). Es folgte die graphische Darstellung einer Beispielfunktion aus jedem Funktionstyp und daran die Erläuterung eines Merkmals aus der erstellten Tabelle (z.B.: Typ: Potenzfunktion; Beispiel: $f(x) = x^3$; zu erläuterndes Merkmal: Monotonie). Anschließend wurde die analytische Untersuchung der Merkmale Nullstellen, Polstellen, Symmetrien, Monotonie besprochen, wobei große Wissensdefizite sichtbar wurden.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als „Visualisierer“ bei der Darstellung der Funktionstypen

3. Lineare Funktionen

Nach der Wiederholung der Definition für lineare Funktionen erfolgte die Erläuterung der Bedeutung der Parameter m und n. In m wurde sofort der Anstieg erkannt. Die unzureichenden Antworten bzgl. des Parameters n erforderten eine genaue Untersuchung. Die Schüler führten ihre Idee des Vergleichs lineare Funktionen mit identischem Anstieg und unterschiedlichem Parameter n aus und erkannten die korrekte Bedeutung. Zur Festigung wurden verschiedene, nicht immer durch den Standardsichtbereich des GTR verlaufende Graphen gezeichnet und entsprechend diskutiert. Zum Stundenende erfolgte die Nullstellenuntersuchung analytisch, die jedoch keine Probleme bereitete.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als Hilfsmittel zum mathematischen Experimentieren (Parametereinfluß)
- Einsatz zur Kontrolle (Nullstellenbestimmung)

Vertretungsstunde: Arbeiten mit dem GTR

Um den Umgang mit dem GTR zu verbessern, mußten die Schüler in dieser nicht geplanten Vertretungsstunde in Partnerarbeit mit Hilfe der zum Rechner gehörenden Bedienungsanleitung folgende Aufgaben lösen: Erzeugen einer Wertetabelle, Zoomen und Einstellen des Darstellungsbereichs, graphisches Bestimmen der Nullstelle (G-SOLVE).

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz zur Schulung der Fähigkeiten und Fertigkeiten
- Einsatz zur Vorbereitung des algorithmische Arbeitens (Handbucharbeit)

4. Quadratische Funktionen, Parametereinfluß auf den Graphenverlauf

Nach Themenbekanntgabe und Wiederholung der Definition der quadratischen Funktion wurden im Unterrichtsgespräch zügig die Eigenschaften der Funktion $f(x) = x^2$ unter Nutzung des GTR zur Veranschaulichung und Kontrolle erarbeitetet. Anschließend erfolgte die Diskussion des Einflusses von Parametern auf den Verlauf des Graphen mit dem GTR in differenzierter Gruppenarbeit. Leider benötigten die Gruppen mehr Zeit als geplant, so daß nur eine Gruppe ausgewertet werden konnte.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als „Impulsgeber" bei der Untersuchung der Funktion $f(x) = x^2$
- Einsatz als Hilfsmittel zum mathematischen Experimentieren bei der Untersuchung des Parametereinflusses
- Einsatz zur Kontrolle

5. Potenzfunktionen (Doppelstunde)

Nach der Fertigstellung der Auswertung der letzten Stunde sollten Eigenschaften der Potenzfunktionen untersucht werden. Durch graphische Veranschaulichung verschiedener Beispiele ($f_1(x)=x^3;\ f_2(x)=x^{-3};\ f_3(x)=x^{\frac{1}{2}};\ f_4(x)=x^4$) und Analyse des „Graphen-Wirrwarr“ führten die Schüler eine Fallunterscheidung zur Untersuchung der Eigenschaften der Potenzfunktionen aus. Dazu fanden sie sich in Gruppen zusammen, wobei jede einen Fall untersuchte und anschließend ein Austausch der Erkenntnisse mit den anderen Gruppen stattfand. Als Hausaufgabe stand die Vorbereitung eines Schülervortrages entweder zu den Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktionen oder zu den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als „Impulsgeber“ („Graphen-Wirrwarr“)
- Einsatz als Hilfsmittel zum mathematischen Experimentieren bei der Untersuchung
- Einsatz zur Kontrolle während der Untersuchung

6. Exponential-, Logarithmus- und trigonometrische Funktionen

Während der beiden Kurzvorträge vervollständigten die Schüler ihre bereits vorhandenen Eigenschaftsübersichten zu den Exponential-, Logarithmus- und trigonometrischen Funktionen. Auf Grundlage dieser Aufzeichnungen versuchten sie in der sich anschließenden Übung aus den auf dem Overhead-Display gegebenen Funktionsgraphen die Funktionsgleichung zu ermitteln und überprüften ihre Vermutung durch Darstellung der Funktion auf ihrem GTR. In einer weiteren Übung erläuterten die Schüler anhand eines Beispiels die graphische Bestimmung der Umkehrfunktion zur gegebenen Exponentialfunktion. Wesentlich Probleme bereitete die anschließende analytische Herleitung, die dadurch leider nicht mehr in der Stunde zu beenden war.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als „Visualisierer“ (Kurzvorträge, Display-Übung)
- Einsatz zur Kontrolle (Vergleich Funktionsgraph mit Displaydarstellung)

7. Kurvenuntersuchungen

Nach Zusammentragen und Feststellen einer geeigneten Schrittfolge untersuchten die Schüler in Einzelarbeit Funktionen sowohl analytisch als auch mit Hilfe des GTR. Dabei sollte den Schülern bewußt gemacht werden, wie sie den GTR als Kontrollmittel einsetzen können.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz für das algorithmische Arbeiten
- Einsatz zur Kontrolle

8. Rechnergenauigkeit und Verknüpfung von Funktionen

Unter dem Vorwand einer weiteren Kurvenuntersuchung erlebten die Schüler die Grenzen des GTR durch widersprüchliche Aussagen des Rechners zu Merkmalen einer gegebenen Funktion. Gleichzeitig wurde die Notwendigkeit analytischer Untersuchungen verdeutlicht. In der anschließenden Diskussion gab es Hinweise zum Einsatz des GTR. Die verbleibende Zeit wurde ausgefüllt mit einem Vortag über die Verknüpfung von Funktionen am Beispiel der Multiplikation der Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = x - 1$.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als „Visualisierer“
- Einsatz zur Darstellung der Näherung des GTR
- Einsatz zur Kontrolle

Klassenarbeit

In der Klassenarbeit erfolgte die Kontrolle von Wissens- und Könnenselementen aus dem Bereich „Funktionen“. Die Schüler hatten Aufgaben, die gänzlich ohne, ausschließlich mit Rechner und sowohl mit als auch ohne GTR zu lösen waren.

Einheiten Mehrdeutige Zuordnungen

Erste Stunde:

Ausgehend von der Darstellung eines Kreises mit Mittelpunktslage in einem kartesischen Koordinatensystem wurde deutlich, daß dieser keine Funktion ist und sich somit auch nicht in einer Funktionsgleichung der Form y = f(x) schreiben läßt. Um den Kreis dennoch irgendwie in Gleichungsform darzustellen, betrachteten die Schüler das

Erzeugen eines Kreises. Nach Bewußtmachen der Schritte (fester Radius, Drehung um 360°) erfolgte die Einführung von Polarkoordinaten. Mit Hilfe des Taschenrechners wurden zunächst Kreise gezeichnet und anschießend weitere Kurven unter ästhetischem Aspekt betrachtet.

Zweite Stunde:

Um wieder zu den „altbewährten“ Koordinaten zurückzukehren, wurde durch die Ausnutzung der Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck ein Zusammenhang zwischen Polar- und kartesischen Koordinaten erarbeitet. Nach Übertragung des Zusammenhangs auf die Polarkoordinatendarstellung des Kreises erhielten die Schüler seine Parameterdarstellung mit dem Parameter φ. Auch hier wurden im Anschluß mit Hilfe des GTR einige Kurven darstellt.

Dritte Stunde:

Zur vollständigen Erfüllung des Ziels, zurück zu x und y für den Kreis, wurde eine Möglichkeit gesucht, den verbliebenen Parameter zu eliminieren. Durch Quadrieren der Gleichungen in Parameterdarstellung und unter Ausnutzung des trigonometrischen Pythagoras erreichten die Schüler den Übergang von der Parameterdarstellungen zu seiner algebraischen Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$. Die Stunde endete mit Darstellungen algebraischer Kurven auf dem Computer, da der GTR dazu keine ausreichenden Möglichkeiten bietet.

Resümee bzgl. GTR:

- Einsatz als „Visualisierer“
- Einsatz zur Kontrolle

2.3 Einige ausgewählte Stunden und -abschnitte

2.3.1 Nullstellenbestimmung mittels GTR

Vorüberlegung:

Die Ermittlung von Nullstellen mit dem GTR (Funktion G-SOLVE) ist ein sehr sinnvolles und praktisches Verfahren, welches sich insbesondere bei Funktionen höheren Grades bzw. nicht elementar untersuchbaren Funktionen einsetzen läßt. Den Schülern steht somit eine weitere Variante zur Nullstellenbestimmung zur Verfügung, die sich bei ausreichender Übung und bei Kenntnis der Grenzen als Kontrollmittel einsetzen läßt. Die Anwendung dessen birgt aber auch die Gefahr, das damit die analytische Nullstellenbestimmung vernachlässigt bzw. ganz ersetzt wird. Dieses Argument kann dadurch entkräftet werden, daß der GTR die Nullstellen nur im Darstellungsbereich und diese nur näherungsweise bestimmt, also nicht notwendigerweise vollständig und exakt.

Die Erarbeitung des Algorithmus wird verknüpft mit Analyse von Literatur. Dazu steht den Schülern die Bedienungsanleitung zum GTR zur Verfügung. Um sich bei Fragen austauschen zu können, gestaltet sich der Abschnitt in Partnerarbeit. Damit ist eine ausführliche Diskussion möglich, welche verstärkt inhaltlich mit dem Begriff Nullstelle arbeitet (s. auch [7]).

Verlauf:

Um den Schüler sowohl das Verfahren, als auch dessen Grenzen zu zeigen, wurden folgende Aufgaben formuliert:

1. Erstelle mit Hilfe des Handbuches eine Schrittfolge zur graphischen Ermittlung von Nullstellen (Wurzeln) von Funktionen!
2. Überprüfe die Richtigkeit Deine Schrittfolge durch Bestimmung der Nullstellen der Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{10}x - 1, \quad x \in \Re$!
3. Vergleiche die gefundenen Nullstellen mit den analytisch ermittelten Werten! Schlußfolgere!

Die Schüler arbeiteten zunächst das im Handbuch dargestellte Beispiel ab und erstellten daraus folgende Schrittfolge:

1. Funktionsgleichung eingeben und Graph zeichnen lassen,
2. Taste F5 (G-SOLVE) und anschließend Taste F1 (ROOT) drücken,
3. eventuell Graph wählen (Taste „↓“),
4. Nullstelle ablesen (weitere Nullstelle durch Drücken von „→“)

Sie überprüften diesen Plan durch Anwendung auf die gegebene Funktion und erhielten die Nullstelle $x_0 = 1$. Die Verwendung der Lösungsformel (analytisch) ergab jedoch zwei Nullstellen, nämlich $x_{01} = -10$; $x_{02} = 1$. Um diesen Widerspruch zu klären, diskutierten die Schüler sachlich mit dem Nachbarn und erkannten schnell, daß der GTR nur die Nullstellen im Darstellungsbereich findet und überprüften diese Vermutung durch Erweiterung des Sichtbereichs.

Auswertung:

Die Erarbeitung der Schrittfolge unter Nutzung der Bedienungsanleitung ist eine durchaus verwendbare Arbeitsweise, die zudem die Selbständigkeit der Schüler hinsichtlich der Arbeit mit Fachliteratur fördert. Durch das gewählte Beispiel wurde dem Schüler neben dem Algorithmus gleichzeitig eine Grenze des Verfahrens gezeigt. Der Hinweis auf die weitere Grenze, die Näherung der Nullstelle durch den GTR erfolgte aus Zeitmangel nicht. Die Festigung des Verfahrens mittels Realisierungs- und Identifizierungshandlungen konnte in der Stunde ebenfalls aus oben genanntem Grund nicht, jedoch innerhalb einer Hausaufgabe teilweise erfolgen. In nachfolgenden Stunden wurde das Verfahren oft ohne Lehrerzutun zu Kontrollzwecken durch die Schüler verwendet.

2.3.2 Einfluß von Parameter auf den Verlauf des Graphen

Vorüberlegung:

In dieser Stunde sollen gemäß der Lehrplanforderung der Einfluß von Parametern auf den Verlauf der Graphen sowie die Eigenschaften quadratischer Funktionen untersucht werden. Neben der Reaktivierung von Begriffen und typischen mathematischen Vorgehensweisen (Variation eines Parameters bei Konstanz der anderen) liegt der Hauptaugenmerk der Stunde auf der Schülertätigkeit in Form von Gruppenarbeit. Diese Methode bietet sich für die Untersuchungen besonders an, obwohl ich mit der Klasse keinerlei Erfahrungen damit habe. Deshalb soll ihnen ein Freiraum bei der Gestaltung der

Arbeit gelassen werden. Durch die Parallelität der Erarbeitung und Auswertung kommt der GTR stark zum Einsatz, besonders zum mathematischen Experimentieren, zum sinnvollen Probieren und Visualisieren. Die Auswertung wird so gestaltet, daß die Schülergruppen die Ergebnisse ihrer Arbeit auf einer Folie in die entsprechende Spalte schreiben, so daß diese im Überblick ersichtlich sind. Das Vorgehen verdeutlicht auch nochmals den Systematisierungscharakter der Stoffeinheit.

Verlauf:

Die Eigenschaften der Funktion $f(x) = x^2$ wurden unter Nutzung des GTR nach Themenbekanntgabe und Wiederholung der Definition der quadratischen Funktion im Unterrichtsgespräch zügig erarbeiteten. Nach Einteilung der Klasse in Gruppen und der Erläuterung der Arbeitsaufträge mit Hinweis auf die Auswertung untersuchten sie jeweils einen der folgenden Fälle:

- Gruppe 1: $f_1(x) = a \cdot x^2$, $x \in \Re$, $a \in \Re$,
- Gruppe 2: $f_2(x) = (x + d)^2$, $x \in \Re$, $d \in \Re$,
- Gruppe 3: $f_3(x) = x^2 + e$, $x \in \Re$, $e \in \Re$,
- Gruppe 4: $f_4(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$, $x \in \Re$, $a, d, e \in \Re$ (Kontrollgruppe).

Hierzu nutzen die Schüler den GTR zum systematischen Probieren und stellten ihre Vermutungen auf. Leider benötigten die Gruppen mehr Zeit als geplant, so daß nur eine ausgewertet werden konnte.

Auswertung:

Der erste Teil der Stunde verlief genau nach Zeitplan, erst der Teil Gruppenarbeit benötigte mehr Zeit als veranschlagt. Dies hatte mehrere Gründe:

1. die noch gering ausgeprägten Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit dem GTR,
2. die ungünstige Aufgabeneinteilung,
3. die geringen Erfahrungen beiderseits mit der Methode Gruppenarbeit.

Die Aufgabeneinteilung hätte anders erfolgen müssen: Zum einen die Splittung des ersten Falles auf zwei Gruppen ($a > 0$ und $a < 0$), damit Wegfall der Kontrollgruppe. Zum anderen die Verkleinerung der Gruppen. Dadurch wären Fälle mehrfach zu vergeben, so daß eine Kontrollmöglichkeit entsteht. Durch die vorteilhafte Verwendung des Arbeitsblattes war die Form der Auswertung fest vorgeschrieben, so daß kein eigenes Schema entwickelt werden mußte. Der GTR wurde primär zum sinnvollen Probieren und zur Darstellung der Graphen verwendet. Das theoretische Durchdenken des Problems erfolgte leider zu wenig. Dafür sind zwei Gründe zu nennen: die mangelnde Erfahrung der Schüler auf diesem Gebiet und die konkreten Vorgaben, die eine theoretische Durchdringung der Untersuchung nicht in den Vordergrund rückten. Eine Abwandlung des Verlaufs und der Methode etwa derart, daß nach Vorgabe der Funktionen bewußt keine weiteren Hilfen gegeben werden und nach einer Probierphase im Unterrichtsgespräch ein systematischeres Vorgehen geplant und ausgeführt wird, ist denkbar, kostet aber mehr Zeit. In späteren Jahrgängen dürften auch die Probleme bei der Bedienung des GTR nicht mehr auftreten, so daß dann für Untersuchungen des Parametereinflusses die Funktion der dynamischen Grafik des GTR zum Einsatz kommen wird.

2.3.3 Kurvenuntersuchung

Vorüberlegung:

In dieser Stunde sollen die Grundlagen für die Kurvendiskussion in der SII geschaffen werden. Dazu ist ein Algorithmus zu erstellen und auf verschiedene Funktionen sowohl analytisch als auch mit Hilfe des GTR anzuwenden. Die Untersuchung wird in Einzelarbeit durchgeführt, um den Anforderungen einer Klassenarbeit gerecht zu werden. Die Stunde bietet erstmalig eine längere Phase algorithmischen Arbeitens, wobei darauf gedrängt wird, den Algorithmus „durchzuziehen“, selbst wenn die Aufgabe etwas länger oder schwieriger ist. Die Schüler sollen auch lernen, den GTR als Kontrollmittel einzusetzen.

Verlauf:

Zunächst erfolgte im Unterrichtsgespräch die Zusammenstellung der zu untersuchenden Merkmale in Form einer Schrittfolge unter Hinweis auf den Einsatz des GTR. Anschließend wurde folgende Aufgabe formuliert:

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{0{,}25x^2 - 4}{1 - x} \quad x \in \Re, x \neq 1$.

   a) Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Symmetrien bzgl. des Ursprungs und der Ordinatenachse analytisch!

   b) Treffe Aussagen zu Nullstellen, Polstellen, Symmetrie, Monotonie, Extrema mit Hilfe des GTR!

   c) Vergleiche die Merkmale Nullstellen, Polstellen und Symmetrie von a) und b)!

Die Schüler arbeiteten einzeln und gingen dabei nach 3 Varianten vor:

1. Graphisches Darstellen → Aufgabenteil b) → Teil a) → Vergleich,
2. Graphisches Darstellen → Aufgabenteil a) → Kontrolle am Graph → Teil b) → Vergleich,
3. Aufgabenteil a) → graphisches Darstellen → Teil b) → Kontrolle am Graph → Vergleich.

Nach der Nennung der Ergebnisse wurde zunächst eine weitere Aufgabe ($f(x) = 10^{x+1} - 4, \quad x \in \Re$) analog gelöst. In der abschließenden Diskussion insbesondere des dritten Aufgabenteils zweifelten die Schüler die Notwendigkeit der analytischen Untersuchung an.

Auswertung:

Anfangs erkundigten sich die Schüler gegenseitig nach Teilergebnissen. Dies klang aber langsam ab, als sie den zweiten Aufgabenteil untersuchten und ihnen bewußt wurde, daß der GTR ihr „Ansprechpartner“ für Kontrollen sein kann. Als Ergebnis dessen erhielt ich Wortmeldungen von Schülern, die sonst wegen ihrer Unsicherheit kaum Mitarbeit zeigten. Für mich unerwartet kam der Zweifel an der Notwendigkeit der analytischen Untersuchung, da bereits die Grenzen der Nullstellenbestimmung besprochen waren.

Wahrscheinlich müssen diese verstärkt aufgezeigt werden. Aus diesem Grund folgte in der nächsten Stunde ein analoge Aufgabe, die der GTR jedoch widersprüchlich löst.

2.3.4 Grenzen des GTR

Vorüberlegung:

Nachdem der GTR für eine Vielzahl von Untersuchungen eingesetzt wurde und die Schüler ihm mittlerweile blind vertrauen, soll ihre Kritikfähigkeit bzgl. des GTR entwickelt werden. Das diese notwendig ist, wurde mir in der vorherigen Stunde bewußt. Der Lehrplan fordert eine solche Untersuchung nicht, jedoch ist eine gesunde Skepsis gegenüber der Rechentechnik angebracht, so daß die Durchführung des Stundenabschnitts gerechtfertigt wird. Damit die Entdeckung der Grenzen wie zufällig geschieht, wird auf das Konzept der letzten Stunde aufgebaut.

Verlauf:

Der Stundenabschnitt begann analog zur Kurvenuntersuchung in der vorherigen Stunde. Als Aufgabe stand diesmal die Analyse der Funktion f mit $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2} \quad x \in \Re,\, x \neq \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$. Die Schüler gingen wie bereits besprochen vor.

Nach kurzer Zeit traten im Standardsichtbereich erste Probleme auf:

1. Der GTR zeigt eine Nullstelle in der Umgebung von $x = -\sqrt{2}$.
2. Der GTR ermittelt die angezeigte Nullstelle mit G-SOLVE nicht.
3. Der GTR ermittelt mit G-SOLVE ein Minimum.
4. Der GTR ermittelt dieses Minimum in der Wertetabelle nicht.

Ich brach die Untersuchung ab und ging auf ein Unterrichtsgespräch ein. Wir diskutierten die Probleme, insbesondere die Frage, wen mehr zu trauen sei: GTR-Angaben oder den analytischen Ergebnissen. Nach Beantwortung der Frage zugunsten der Analyse wurde noch eine allgemeine Verhaltensregeln in solchen Fällen besprochen (Anwendung der Zoom-Funktion um den kritischen Bereich, Änderung des Darstellungsmodus, analytische Untersuchung vorweg, Erstellung einer Wertetabelle um die „kritische“ Stelle mit kleiner Schrittweite) und die Aufgabe beendet.

Auswertung:

Die Motivation zur genauen Untersuchung des Fehlverhaltens war sehr groß. Leider stand nicht genügend Zeit für die genaue Betrachtung der Ursache solcher Fehler zur Verfügung.

3 Ergebnisse und Schlußfolgerungen

3.1 Die Untersuchung im Überblick

Diese Untersuchung hatte einmaliges.

1. Die Klasse mußte mit einem völlig neuen Medium - dem GTR - vertraut gemacht werden.
2. Sie erhielt das Gerät erst in der zweiten Unterrichtseinheit im Lernbereich.
3. Es wurde erstmals ein völlig neu konzipierter Lernbereich vermittelt, der zudem Elemente enthielt, die noch nie in einer Klasse 10 behandelt wurden.
4. Didaktisch-methodische Literatur mit Empfehlungen zum Einsatz des GTR waren äußerst rar.

Diese Faktoren hatten zur Folge, daß die Untersuchung größtenteils nur querschnittsartig durchführbar war, denn neben der Erfüllung der Lehrplananforderungen stand auch der Aufbau von Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit dem GTR. Wenn nach Abschluß der Übergangsphase der Einführung des Rechners den Schülern der Umgang mit ihm ab Klasse 8 geläufig sein wird, findet man sicherlich eine andere Struktur der beschriebenen Stunden. Dann wird auch das Hauptaugenmerk wieder auf der Systematisierung liegen und die vom Lehrplan vorgegebene Richtstundenzahl erfüllbar sein. Aus diesem Grund sollte die Untersuchung zu einem späteren Zeitpunkt und unter Aspekten der Methodik wiederholt und vertieft werden.

3.2 Persönliches

- Ich empfinde es mittlerweile als Nachteil, daß das Thema der Hausarbeit sehr allgemein formuliert ist. Eine Konkretisierung des Themas (z.B.: Einsatzmöglichkeiten des GTR zur Entwicklung heuristischer Strategien o.ä.) hätte tiefergehende Untersuchungen zur Folge gehabt.

- Die Untersuchung zeigte mir, wie positiv sich andere Sozialformen als nur immer Frontalunterricht auf das „Mathematikunterrichten“ auswirken. Ich stand insbesondere der Gruppenarbeit skeptisch gegenüber, da ich diese Form in meiner Schulzeit kaum erlebt hatte. Mittlerweile stellt sie jedoch eine weitere Variante neben der eingefahrenen Schiene des Frontalunterrichts dar (unter Berücksichtigung der „Ratschläge zur Unterrichtsgestaltung“ aus [2]).

- Müßte ich die Stunden unter gleichen Bedingungen nochmals halten, so würde ich - wie auch immer - noch stärker den Sytematisierungscharakter des Lernbereichs entsprechen wollen und beim mathematischen Experimentieren mehr auf das Aufstellen von Vermutungen und die rechnerunabhängige Begründung achten müssen. Beides unterlag im Unterricht der Stoffülle bzw. wurde vom Lehrer ausgeführt.

3.3 Generelle Ergebnisse und Schlußfolgerungen

Allgemeines

Das Ziel der Hausarbeit, die Darstellung von Einsatzmöglichkeiten des GTR wurde im Praxisteil erläutert. *Einsatzstellen* fanden sich in jeder Stunde in vielfältiger Weise. Der GTR konnte zur Erprobung der *Einsatzvarianten* mathematischen Experimentieren (Einfluß von Parametern), algorithmischen Arbeiten (Kurvenuntersuchung), Arbeiten mit Näherungen (Grenzen des GTR), Visualisieren (mehrdeutige Zuordnungen), Kontrolle (Nullstellenbestimmung) und Impulsgeber (Untersuchung der Potenzfunktionen) wie im Schema auf Seite 13 gefordert, sinnvoll eingesetzt werden. Die Nutzung erfolgte dabei nicht um des Rechners willen, sondern um die dahinterstehende Mathematik zu durchleuchten und zu verstehen. Der GTR läßt sich wie kein anderes Medium im Unterricht für die Erfüllung der im ersten Kapitel erläuterten allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts einsetzen. Gerade für die Befähigung der Schüler zum heuristischen Arbeiten durch die Entwicklung von Fähigkeiten im mathematischen Experimentieren scheint der GTR in diesem Lernbereich wie geschaffen zu sein. Aber auch die in der Literatur aufgezeigten Gefahren wurden sichtbar, wie etwa das Drauflosprobieren oder das blinde Vertrauen in die Angaben des GTR (Grenze des GTR).

Literaturdiskussion und Unterrichtspraxis

Im Verlauf der Untersuchungen konnten einige Beobachtungen gemacht und Schlußfolgerungen gezogen werden, die die Literatur nur z.T. diskutiert und deshalb hier eine Darstellung finden:

1. Der Rechnereinsatz bereichert den Mathematikunterricht, auch wenn kein unmittelbarer Wissenszuwachs sichtbar wird. Die Schüler zeigen (jedenfalls anfangs) eine starke Motivation. Sehr schnell wird aber deutlich, daß die Behandlung verschiedener Themen mit dem GTR nicht unbedingt leichter ist als ohne Rechner (Kurvenuntersuchung gebrochenrationaler Funktionen) oder daß der GTR nicht zur Lösung sämtlicher Probleme verwendet werden kann, wie etwa bei Termumstellungen. Es zeigt sich auch, daß Aufgaben sehr gründlich durchdacht werden müssen und mathematisches Können gefordert ist (Untersuchung der Potenzfunktionen). Dennoch fördert der GTR-Einsatz das funktionale Denken, wenn anspruchsvolle mathematische Inhalte diskutiert werden, wie in der durchgeführten Diskussion des Exponenteneinflusses auf den Verlauf algebraischer Kurven vom Typ $x^n + y^n = 1$ ($n \in N$)[2]. So verlieren die Schüler zunehmend die Scheu vor komplexen Problemen und lernen diese zu durchdenken. Damit leistet der GTR einen mittelbaren Wissenszuwachs, der eben nicht auf dem GTR selbst, sondern auf dem Einsatz selbigen beruht.

2. Durch die Verwendung des Rechners stehen oft verschiedene Wege zur Lösung eines Problems zur Verfügung (z.B. Nullstellenbestimmung graphisch mittels G-SOLVE, analytisch mittel EQUATION). Die bewußte Auswahl und richtige Bearbeitung des Weges stellt für den Schüler ein Problem dar. Hier mußte der Lehrer in der Erarbeitungsphase entscheiden, welche Lösungsstrategien er mit den Schülern diskutiert und welche er ihnen vorenthält bzw. individuell entdecken läßt. So wurde z.B. von mir ein weiterer Weg der Nullstellenbestimmung durch ständiges Zoomen des Darstellungsbereichs um die Nullstelle, wie es mehrfach in

[2] Als Aufgabe stand, mit Hilfe der gegebenen Gleichung ein Rechteck darzustellen. Dieses entsteht bei sehr großen, geradzahligen Exponenten.

der Literatur vorgegeben wird (s. [7] oder [9]), nicht besprochen. Eine Vielzahl von Verfahren verwirren die Schüler eher, als das sie ihnen helfen.

3. Leistungsschwache Schüler haben bereits häufig bei der Erfassung der Bedienung des GTR zur Lösung eines Problems Schwierigkeiten. Ihnen bietet die schriftliche (klassische) Untersuchung eine größere Sicherheit, da sie diese über einen längeren Zeitraum schon beherrschen. Allerdings sollte dann nicht unerwähnt bleiben, daß gerade diese Schülergruppe den GTR für die Kontrolle ihrer schriftlich ermittelten Ergebnisse erfolgreich entsetzt, indem sie „nur“ Visualiseren und ihre Ergebnisse damit vergleichen. Aus diesem Grund wurden in der Klassenarbeit Aufgaben formuliert, die sowohl mit als auch ohne GTR zu lösen waren.

4. Leistungsstarke Schüler nutzen das Angebot an Lösungsvarianten etwa zur Untersuchung der Symmetrie, der Nullstellen oder Polstellen. Sie vertiefen dadurch ihr Verständnis über Begriffe und ihr Wissen über Eigenschaften von Funktionen. Um beide Gruppen (3. und 4.) gerecht zu werden, ist ein starke Differenzierung im Unterricht und in der Aufgabenstellung erforderlich, d.h. ein gutes Einsatzfeld für z.B. Gruppenarbeit.

5. Gibt man den Schülern eine offene Fragestellung, z.B., „Ermittle die Nullstellen ...“, kommt es oft zu Rückfragen, auf welchem Weg dies zu ermitteln sei. Selbst die Aufgabe der „Bestimmung“ von Nullstellen ist nicht mehr eindeutig. Die Stellen können analytisch-rechnerisch, näherungsweise durch Ablesen der Nullstelle aus der graphischen Darstellung oder durch G-SOLVE bestimmt werden. Jede Vorgehensweise führt zum Ziel. Sollen diese Aufgaben bewertet werden, so stellt die Vielfalt eine Hürde bei der Punktvergabe dar. Ein analytischer Weg verdient sicherlich eine stärkere Aufwertung als das bloße Ablesen. Um diese Probleme zeitweilig zu entkräften, gab ich jeweils das „Einsatzmittel“ vor, also „Bestimme mit Hilfe des GTR ...“ oder „Bestimme rechnerisch ...“. Damit wird die Form der offenen Aufgabenstellung zwar wieder beschnitten, doch wenn die Klasse das Gerät erst neu hat und noch Probleme im Umgang vorhanden sind, finde ich diesen Schritt gerechtfertigt. Allerdings ist ein striktes Verbot für Teilaufgaben schwierig zu überwachen. Dennoch muß die Hinführung zu solch offenen Aufgaben erfolgen,

damit der Schüler lernt, selbst zu entscheiden, welchen Weg er unter Beachtung der Rationalität und Effektivität gehen soll.

6. Das mathematische Experimentieren erlangt mit dem GTR eine völlig neue Qualität. Allerdings zeigen sich hierbei auch Problemzonen. So stellte ich fest, daß das ein all zu schnelles „Loslassen“ der Klasse zum unsystematischen Probieren führte. Erst nach Verdeutlichung der Arbeitsweise des mathematischen Experimentierens konnte dies rückgängig gemacht werden. Wesentlich stärker muß demzufolge die Schrittfolge und der dahinter stehende Zweck bewußt gemacht werden. Das Aufstellen einer Hypothese vor Durchführung des Versuchs, das Finden von Gesetzmäßigkeiten (Verallgemeinerung) nach dem Experimente unabhängig vom GTR ist notwendig und gehört zum mathematischen Experimentieren dazu, eben die Kette „sehen“ → „vermuten“ → „fragen“ → „beweisen“.

7. Werden den Schülern nicht die Grenzen des GTR gezeigt, vertrauen sie ihm bald völlig. Die Sensibilisierung und die Entwicklung eines gesunden Maßes an Skepsis kann dem entgegenwirken. Einfache, dem Schüler einleuchtende Beispiele im Unterricht mit eingestreut (und nicht nur in Vertretungsstunden) können dem dienen. Das Problem stellt sich aber nicht nur beim Einsatz des Graphikteils des Rechners. Auch im „alltäglichen“ Einsatz kann sich der GTR „verrechnen“, wie in [10] ab Seite 408 sehr schön gezeigt.

8. Der in der Literatur ([6]) befürchtete Verlust von gewissen Fähigkeiten und Fertigkeiten konnte nicht nachgewiesen werden. Meines Erachtens wird dieser jedoch eintreten und erst bei längerfristigen Untersuchungen sichtbar werden. Der Verlust wird m. E. nicht so radikal sein, wie damals bei der Einführung des „einfachen“ Taschenrechners.

9. Wie die Literatur ([17]) und die gehaltenen Stunden zeigen, wird das mathematische Experimentieren die Hauptanwendung des GTR werden. Zumindest läßt sich diese Methode hervorragend im Lernbereich „Funktionen“ einsetzen. Die Erhöhung des Anteils mit algorithmischen Arbeiten wird wohl erst in Jahrgangsstufe 11 erfolgen, wenn dort Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben, Flächeninhaltsberechnungen u. ä. besprochen werden.

Verbesserungsvorschläge

In Auswertung der Stunden sowie der Schülerreaktionen entstanden einige Unterrichtsvarianten und Ideen, die an dieser Stelle vorgestellt werden.

1. Bei der Behandlung der Nullstellen von Potenzfunktionen scheint es mir notwendig, den Schülern den Fundamentalsatz der Algebra zu geben. Mit seiner Kenntnis wird es ihnen möglich, die Anzahl der Nullstellen nach oben hin zu begrenzen. Dies ist insofern vorteilhaft, als das die Schüler beim grafischen Bestimmen der Nullstellen über einen Anhaltspunkt verfügen.

2. Die von mir verwendete Variante - Vorgabe eines Graphen → Vermuten einer möglichen Funktionsgleichung → Kontrolle am eigenen Display - kann weiter ausgebaut werden. So läßt sich bei der Behandlung des Parametereinflusses unter Nutzung der dynamischen Grafik eine Schar Funktionen erzeugen, die sich in einem Parameter unterscheiden. Dem Schüler obliegt es nun dies zu erkennen, eventuelle den „Parameterabstand“ zu bestimmen, am eigenen Rechner zu überprüfen und abzuwandeln. Dieses Prinzip läßt sich auch auf Wertetabellen übertragen. Somit kommen sowohl Identifizierungs- als auch Realisierungshandlungen zum Einsatz.

3. Der Bereich „Mehrdeutige Zuordnungen“ bietet neben der von mit verwendeten Variante auch noch andere Zugänge, die etwa in einer Klasse mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil zum Einsatz kommen können. So ist es möglich, von den Bewegungsgesetzen der Physik beim schrägen Wurf auszugehen. Man erhält die Parameterdarstellung x(t) und y(t) und nach Auflösung und Umstellung die algebraische Darstellung der Kurve des Bewegungsverlaufs y(x).

4. Eine Variante zur Einführung von Polarkoordianten bietet die Diskussion der Herstellung eines Schraubenfeder, wie sie in Uhren eingesetzt wird, mittels CAD/CAM. Dazu benötigt der Computer ein mathematisches Modell der Feder in Form einer Gleichung. Diese kann anschaulich ermittelt werden.

5. Bei der Einführung von Kurven in Parameterdarstellung sollte auf das Erzeugen einer Wertetabelle und der anschließenden Erstellung des Graphen zurückgegriffen werden. Dadurch versteht der Schüler die Notwendigkeit von zwei Gleichungen und das Entstehen der Punkt des Graphen wesentlich besser.

3.4 Konsequenzen

Die Folgerungen zeigen, daß der Einsatz des GTR auch weiterhin diskutiert werden muß, nicht nur, um die Unsicherheit innerhalb des Lehrkörpers zu vermindern. Benötigt werden methodisch-didaktische Hinweise zum Einsatz des GTR in allen Lernbereichen. Eine gute Vorlage dazu stellt [17] dar. Handlungsbedarf besteht auch zur Beseitigung der große Unsicherheit bezüglich der Prüfungsanforderungen und den Auswirkungen des GTR-Einsatzes auf das Abitur. So praktisch und sinnvoll der Einsatz des graphikfähigen Taschenrechners auch ist, es gibt noch viele offene Fragen. Solange diese nicht beantwortet sind, werden wir mit eingangs erwähnten „Verdauungsschwierigkeiten“ kämpfen müssen.

Literaturverzeichnis

[1] MEYER, HILBERT: Unterrichtsmethoden. 1. Theorieband. 6. Aufl. Frankfurt am Main: Cornelsen Verlag Scriptor 1994.

[2] MEYER, HILBERT: Unterrichtsmethoden. 2. Praxisband. 2. Aufl. Frankfurt am Main: Cornelsen Verlag Scriptor 1995.

[3] SCHMID, AUGUST: Quo vadis - Schulmathematik? Ein Vortrag anläßlich des „Tag der Mathematik“ am 14. November 1995 an der Universität Stuttgart von Prof. August Schmid Staatl. Seminar für Schulpädagogik Tübingen. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

[4] Sächsisches Staatsministerium für Kultus: Lehrplan Gymnasium Mathematik Klassen 5 - 12. Dresden, 1992.

[5] Sächsisches Staatsministerium für Kultus: Präzisierung des Lehrplans Gymnasium Mathematik Klassen 5 - 12 vom 1. August 1992. Dresden, 1996.

[6] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 30(1992)3: FLADE, L.; LICHTENBERG, W.; PRUZINA, M.: Zum Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Über einen Schulversuch in Sachsen-Anhalt.

[7] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 31(1993)10: PRUZINA, M.; GOLDOWSKY, H.-G.: Graphisches Darstellen linearer Funktionen mit und ohne Graphik-Taschenrechner.

[8] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 31(1993)11: PRUZINA, M.; GRIESBACH, K.: Grafikfähige Taschenrechner - Unterrichtserfahrungen aus den Klassen 9 und 10. Mathematisches Experimentieren mit quadratischen Funktionen.

[9] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 30(1992)2: PRUZINA, M.: Grafikfähiger Taschenrechner - Kurvendiskussion ade?.

[10] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 33(1995)7/8: LENEKE, B.: Grafikfähige Taschenrechner - bejubelte und umstrittene, notwendige oder überflüssige didaktisch-methodische Hilfsmittel im Unterricht?!.

[11] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 35(1997)1: GRIESBACH, K; LENEKE, B.: Traditionelle Aufgaben mit dem GTR gelöst.

[12] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 34(1996)9: LICHTENBERG, W.; PRUZINA, M.: Graphikfähige Taschenrechner als „Impulsgeber" beim Lösen von Aufgaben.

[13] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 33(1995)3: BLANKE, I.; PRUZINA, M.: Sind Kuvendiskussionen mit graphikfähigen Taschenrechnern leichter?

[14] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 35(1997)3: FISCHER, B.; LICHTENBERG, W.: Wendepunkte mit GTR graphisch und analytisch bestimmen.

[15] Mathematik in der Schule. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, H. 32(1994)2: LICHTENBERG, W.; MESSNER, A.: Grafikfähige Taschenrechner - Unterrichtserfahrungen aus den Klassen 9 und 10. Zum Lösen von Extremwertaufgaben.

[16] Casio Electronics: Color Power Graphic CFX-9850G/9950G Bedienungsanleitung.

[17] Weber, K; Zillmer, W: Grafikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht. Didaktisch-methodische Empfehlungen. Sekundarstufe II. Berlin: paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH 1997.

Erklärung

Ich versichere, daß ich die Arbeit selbständig angefertigt, nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Chemnitz, den 28.08.1997 Tino Hempel

Anlagen

Anlagenverzeichnis

Stoffverteilungsplan

Lernbereich „Funktionen“ Klasse 10,

Richtstundenzahl: 10 Stunden,

Stundenzahl lt. Stoffverteilungsplan: 14 incl. 2 Stunden für Kontrolle und Auswertung

Thema	Inhalt	Kommentar
Funktionen (2 Stunden)	• Definition Funktion • Darstellungsformen von Funktionen • Funktionstypen • Merkmale von Funktionen	GTR für Wertetabellen und Graphendarstellung, Visualisierung der Merkmale
Eigenschaften der Funktionstypen und Einfluß von Parametern (5 Stunden)	• lineare Funktionen • quadratische Funktionen • Einfluß der Parameter auf den Verlauf des Graphen • Potenzfunktionen • Exponentialfunktionen • Verknüpfen von Funktionen • Umkehrfunktion • Trigonometrische Funktionen	Visualisierung Impuls, Verwendung zur Diskussion des Parametereinflusses, Kontrollmöglichkeiten des GTR, Lösen von Aufgaben
Anwendungen (2 Stunde)	• Kurvenuntersuchungen • Grenzen des GTR	Visualisierung, Kontrolle, algorithmisches Arbeiten
Klassenarbeit (1 Stunde)		
Mehrdeutige Zuordnungen (3 Stunden)	• Polarkoordinaten • Kurve in Parameterdarstellung • Kurve in Form einer Algebraischen Gleichung	Visualisierung, Impuls
Auswertung Klassenarbeit (1 Stunde)		

Verlaufsplan: Nullstellenbestimmung mittels GTR

Der im zweiten Kapitel beschriebene Stundenabschnitt war Teil der hier beschriebenen Einheit. Der Plan wurde nachträglich angefertigt, weil es sich um eine Vertretungsstunde handelte!

Zeit	Inhalt
9:25	*Zielstellung der Stunde: Umgang mit dem GTR üben* Aufgabenstellung: „Erarbeitet Euch in Partnerarbeit mit Hilfe der Bedienungsanleitung Schrittfolgen zu untenstehenden Tätigkeiten! Überprüft diese (nur bei 1. und 3.), indem Ihr ein Beispiel sowohl rechnerisch als auch mit dem GTR betrachtet!“
9:30	*1. Erzeugen einer Wertetabelle, Zeit: 10 min* (S. 242 - 245) Überprüfungsbeispiel: $f(x) = 2x^3 - 1$, Table Range x Start: -1, End: 1.5, Pitch: 0.5 Reserve: Aus Tabelle heraus sofort graphisch darstellen (G-CON)
9:40	*2. Einstellen des Darstellungsbereichs und Zoomen (Box-Zoom), Zeit: 15 min* (S. 131, 155) Überprüfungsbeispiele: 1. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, verschiedene Darstellung um den „interessanten“ Bereich 2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, Zoom um den Punkt (1; 2) (Lücke)
9:55	*3. graphisches Bestimmen der Nullstelle, Zeit: 15 min* (S. 169) Überprüfungsbeispiel: $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{10}x - 1$, $x_{01} = -10$, $x_{02} = 1$ Diskussion: Warum wird die Nullstelle $x_{01} = -10$ nicht bei allen ermittelt? → Darstellungsbereich!
R	*4. graphisches Bestimmen der Maxima und Minima* (S. 170) Überprüfungsbeispiel: $f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - 1$, $P_{min}(0; -1)$, $P_{max}(-6; 9{,}8)$

Verlaufsplan: Einfluß von Parametern auf den Verlauf des Graphen

Die im zweiten Kapitel beschriebene Stunde war eine Hospitationsstunde.

Zeit	Inhalt	Lehrertätigkeit	Schülertätigkeit
9:25	*Themenbekanntgabe*: • Untersuchung quadratischer Funktionen mittels GTR; • Einfluß von Parametern auf den Verlauf der Graphen; • Ausgewählte Eigenschaften	Themenbekanntgabe	Zuhören
9:27	*Definition quadratische Funktionen:* „Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$, $x \in \Re$, a, b, c $\in \Re$ heißt quadratische Funktion.“ *Sonderfall $f(x) = x^2$* DB: $x \in \Re$ WB: $y \in \Re, y \geq 0$ Monotonie: für $x \leq 0$ monoton fallend, für $x > 0$ monoton steigend Symmetrie: $f(x) = x^2$ ist y-Achsensymm. Nullstellen: $x_0 = 0$ Scheitelpunkt: $S_{min}(0; 0)$	Stellt Frage nach Definition Notieren der Definition an der Tafel Hinweis auf Untersuchung dieser Funktion Vorschlag der Untersuchung des Sonderfall $f(x) = x^2$ Nenne zu untersuchende Eigenschaften Welche Eigenschaften besitzt diese Funktion Notieren an der Tafel, kein Graph!	Beantwortet Frage Abschrift aufs Arbeitsblatt Nennen der zu untersuchenden Eigenschaften (DB/WB, Monotonie, Symmetrie, Nullstellen, Scheitelpunkt) und der Eigenschaften selbst Abschreiben
9:40	*Einfluß von Parametern auf den Verlauf der Graphen und ausgewählte Eigenschaften:* Funktionen: Eigenschaften: siehe Tafelbild Gruppe 1: $f_1(x) = a \cdot x^2$, Gruppe 2: $f_2(x) = (x + d)^2$ Gruppe 3: $f_3(x) = x^2 + e$ Gruppe 4 (Kontrollgruppe): $f_4(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$	Einweisung in die Partner-/Gruppenarbeit, Zeitlimit setzen, Hinweise auf zu untersuchende Eigenschaften in bezug auf $f(x) = x^2$, Tafelbild entwickeln Hilfestellungen geben	mathematisches Experimentieren mittels GTR, vervollständigen des Tafelbildes/Arbeitsblattes/Folie
10:00	*Auswertung und Diskussion:* Zusammenfassung der Parameterauswirkungen R: Hinführung zur Definitionsdarstellung	Fragen an die Gruppen R: Weg zur Definitionsdarstellung aufzeigen	Gruppen nennen kurz ihre Erkenntnisse; Notizen vervollständigen
10:08	*Zusammenfassung und HA*	LV; Ausblick auf die folgende Stunde; HA: „Informiere Dich im Mathematikhefter Klasse 9 über die Potenz- und Wurzelfunktionen!“	

Arbeitsblatt (verkleinert): Parametereinfluß

Quadratische Funktionen
Def.: ____
____
____
____

Sonderfall $f(x) = x^2$	$f(x) = a \cdot x^2$	$f(x) = (x + d)^2$	$f(x) = x^2 + e$
	Parametereinfluß: ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	Parametereinfluß: ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	Parametereinfluß: ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________
Merkmale DB: $x \in \Re$ WB: $y \in \Re, y \geq 0$ Monotonie: $x \leq 0$ m. fall. $x > 0$ m. st. Symmetrie: Axialsymmetrie Nullstellen: $x_0 = 0$ Scheitelpunkt: $S_{min}(0; 0)$	Merkmale DB: WB: Monotonie: Symmetrie: Nullstellen: Scheitelpunkt:	Merkmale DB: WB: Monotonie: Symmetrie: Nullstellen: Scheitelpunkt:	Merkmale DB: WB: Monotonie: Symmetrie: Nullstellen: Scheitelpunkt:

Verlaufsplan: Kurvenuntersuchung

Der im zweiten Kapitel beschriebene Stundenabschnitt war Teil der hier beschriebenen Stunde.

Zeit	Inhalt
9:25	*Zielstellung der Stunde:* Anwendung des Wissens über Eigenschaften von Funktionen bei Kurvenuntersuchungen
9:27	*Schrittfolge und GTR-Einsatz:* Zusammentragen der untersuchbaren Eigenschaften von Funktionen: *ohne GTR* — *mit GTR* Nullstelle — Nullstelle (G-SOLVE) Polstelle — Polstelle (Ablesen) Symmetrien — Symmetrien (Ablesen) Monotonie (Ablesen) Extrema (Ablesen, G-SOLVE)
9:35	*Anwendung der Schrittfolge:* Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{0{,}25x^2-4}{1-x} \quad x\in\Re,\ x\neq 1$. a) Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Symmetrien bzgl. des Ursprungs und der Ordinatenachse analytisch! b) Treffe Aussagen zu Nullstellen, Polstellen, Symmetrie, Monotonie, Extrema mit Hilfe des GTR! c) Vergleiche die Merkmale Nullstellen, Polstellen und Symmetrie der Aufgaben von a) und b)! (Lös: x_{01} = -2, x_{02} = 2, x_p = 1, keine Symmetrie bzgl. Ursprung oder y-Achse, Fkt. ist monoton fallend und besitzt kein Extrema (im Sichtbereich des GTR))
9:50	*Vergleich und kurze Diskussion/Probleme?* 2. Aufgabe: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=10^{x+1}-4 \quad x\in\Re$. Untersuche die Funktion analog! (Lös: x_0 = lg(4) -1 ≈ -0,4; keine Polstelle, keine Symmetrie bzgl. Ursprung oder y-Achse, Fkt. ist monoton wachsend und besitzt kein Extrema (im Sichtbereich des GTR))
10:05	*Diskussion der Problemstellen* • Logarithmieren, Symmetrieuntersuchung • Vorteile/Nachteile des GTR-Einsatzes

Verlaufsplan: Grenzen des GTR

Der im zweiten Kapitel beschriebene Stundenabschnitt war Teil der hier beschriebenen Stunde.

Zeit	Inhalt
9:25	*Zielstellung der Stunde:* Fortsetzung der Kurvenuntersuchung und Darstellung der Verknüpfung von Funktionen
9:28	*Genauigkeit (Grenzen) des GTR:* Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2} \quad x \in \Re,\ x \neq \left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$. a) Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Symmetrien bzgl. des Ursprungs und der Ordinatenachse analytisch! b) Treffe Aussagen zu Nullstellen, Polstellen, Symmetrie, Monotonie, Extrema mit Hilfe des GTR! c) Vergleiche die Merkmale Nullstellen, Polstellen und Symmetrie der Aufgaben von a) und b)! (Lös: x_0 = -1, x_{p1} = $-\sqrt{2}$, x_{p2} = $\sqrt{2}$, keine Symmetrie bzgl. Ursprung oder y-Achse, Fkt. ist monoton fallend und besitzt kein Extrema) Problem dieser Funktion: GTR zeichnet und rechnet falsch! → Diskussion und analytische Untersuchung
9:50	*Verknüpfen von Funktionen* LV: Frage: Wie entstehen eigentlich solche Funktionen wie oben? →Zusammenbau einfacherer Funktionen mittels Grundrechenoperationen zu komplizierteren Funktionen. → Kann dann vielleicht aus den Eigenschaften der einfachen auf die der komplexeren Funktion geschlossen werden? Beispiel: $f_1(x)=x^2 \quad x\in\Re$ und $f_2(x)=x-1 \quad x\in\Re$ Gesucht: g = $f_1 \cdot f_2$ Veranschaulichen der drei Funktionen mittels GTR Diskussion markanter Stellen (Nullstellen der Funktionen f_1 und f_2) und Eigenschaften (Verhalten im Unendlichen), Schlußfolgerung auf Produkt der beiden Funktionen. UG: Diskussion Quotient aus f_1 und f_2?

Einige ästhetische Kurven

Die hier vorgestellten Kurven bieten sich zur Veranschaulichung mit dem GTR im Abschnitt „Mehrdeutige Zuordnungen an“. Die Kurven, welche in algebraischer Gleichung gegeben sind, lassen sich i.d.R. nicht auf dem Casio GTR darstellen, wohl aber auf dem PC mittels DERIVE.

Kurven in Polarkoordinaten (i.d.R. gilt 0 £ j *< 2*p*):*

Schleifenbahn	$r(\varphi) = \sin 2\varphi$
Spirale	$r(\varphi) = 2\varphi$
Gerade	$r(\varphi) = 1/(3\cdot\cos\varphi + 4\cdot\sin\varphi)$
hyperbolische Spirale	$r(\varphi) = 1/\varphi$
Strophoide	$r(\varphi) = -\cos 2\varphi/\cos \varphi$
Lemniskate	$r(\varphi) = \sqrt{2\cos 2\varphi}$
Ellipse	$r(\varphi) = 5/(4 - 3\cdot\cos\varphi)$
Kardioide	$r(\varphi) = 1 + \cos \varphi$

Kurven in Parameterdarstellung (i.d.R. gilt $0 \leq t < 2\pi$, für a, b bzw. c lassen sich beliebige Zahlen einsetzen):

Tricuspoid:	$x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$ $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$
Asteroide:	$x(t) = a\cos^3(t)$ $y(t) = a\sin^3(t)$
Lissayous:	$x(t) = a\sin(nt + c)$ $y(t) = b\sin(t)$
Epicycloid/Epitrochoid:	$x(t) = a\cdot\cos(t) - c\cdot\cos((b+1)t)$ $y(t) = a\cdot\sin(t) - c\cdot\sin((b+1)t)$ z.B.: a = 1; b = 5; c = 2
Hypocycloid:	$x(t) = a\cdot\cos(t) + c\cdot\cos((b+1)t)$ $y(t) = a\cdot\sin(t) - c\cdot\sin((b+1)t)$ z.B.: a = 1; b = 5; c = 2

Kurven in Form einer algebraischen Gleichung:

Leider sind die Bezeichnungen der Kurve unbekannt.

- $y^2 = x^2\cdot(x + 1)$
- $y^2 - x^4 + x^6 = 0$
- $x^2\cdot y + x\cdot y^2 = 2$
- $y^4 + x^4 - y^2 - x^2 = 0$
- $y^3 + x^3 - 3x^2 = 0$
- $y^4 - (x^2 - 1)\cdot(x^2 - 4) = 0$
- $(x^2 - 4x + 8)y^2 - 4x^2 = 0$
- $y^4 - 4y^3 + 8x^2y + x^4 = 0$
- $x^3 - 3xy + y^3 = 0$
- $x^2y + 3x^2 + y = 0$