

Rechnen auf den Linien

Facharbeit

**am Richard-Wossidlo-Gymnasium
Ribnitz-Damgarten**

**eingereicht bei Herrn
R. Wossidlo**

**vorgelegt von
Max Mustermann**

**Kurs 123 im
Schuljahr 2002/2003**

Ribnitz-Damgarten, Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Vom Abakus zum Rechnen auf den Linien	3
2	Rechnen auf den Linien	7
2.1	Adam Ries – Wegbereiter des Linienrechnens	7
2.2	Der Aufbau des Rechenbrettes	8
2.3	Das Auslegen einer Zahl – Numeratio.....	8
2.4	Rechenregeln – Elevatio und Resolutio.....	9
2.5	Addition.....	10
2.6	Subtraktion	10
2.7	Multiplikation	11
2.8	Division	13
3	Zusammenfassung.....	15
4	Anhang	16
4.1	Literaturverzeichnis	16
4.2	Abbildungsverzeichnis.....	17
4.3	Tabellenverzeichnis.....	17
4.4	Erklärung des Verfassers	18

1 Vom Abakus zum Rechnen auf den Linien

Der Umgang mit Zahlen und Schrift war nach Entstehung dieser nur wenigen vorbehalten. Der wachsende Bedarf des Handels und der staatlichen Verwaltung an Rechen- und Schreibtätigkeit gab Anstöße zur Vereinfachung der anfallenden Tätigkeiten. Die Menschen des Altertums benutzten zum Abzählen größerer Mengen neben ihren Fingern (lat. digit) und Händen auch **Knotenschnüre** und **Kerbhölzer**. Damit konnten sie jedoch keine Berechnungen durchführen. Doch der aufkommende Handel benötigte das Rechnen und damit auch Hilfsmittel. Diese schuf man in Form kleiner Kalk- oder Kieselsteine (lat. calculus - Kalkstein), Muscheln oder Holzstäbchen, die zum Rechnen in den Sand gelegt wurden. Schnell bemerkte man, dass eine günstigere Unterlage, wie etwa ein Holzbrett oder ein glatter großer Stein den Rechensteinen besseren Halt gaben - so entstanden um 500 vor Christus die ersten Rechenbretter, die den Namen **Abakus** (lat. Platte) erhielten.

Die Urform des Abakus bestand aus dem tafelartigen Brett, welches in mehrere senkrecht verlaufende Spalten eingeteilt war. Je eine Spalte nahm, entweder von rechts (Griechenland) oder links (Ägypten) beginnend, die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender und Millionen auf. Damit war es möglich, alle bekannten Zahlen darzustellen und durch Hinzufügen, Wegnehmen oder Verschieben von Rechensteinen auch zu rechnen und zwar in den vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Das Rechnen auf dem Abakus war praktisch und genoss ein hohes Ansehen. Für die Tafeln wurden auch wertvolle Materialien eingesetzt, in Griechenland u. a. weißer Marmor. In China verwendete man keine hölzernen Stäbchen sondern Gusseisenstäbchen. Rechenmeister, die mit dem Abakus geschickt und schnell umzugehen vermochten, waren geachtete Persönlichkeiten.

In Rom, dem antiken Zentrum des Rechnens mit dem Abakus, löste ein kleiner leichter Abakus - der Handabakus - die primitiven und plumpen Modelle des Anfangs ab.

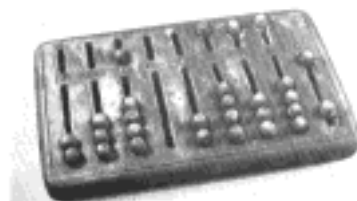


Abbildung 1: Römischer Handabakus (aus [2])

Der Handabakus bestand aus senkrecht verlaufenden Rillen in denen sich verschiebbare Kugelknöpfe befanden, die in den Rillen glitten. Dadurch konnte man die Zähl-

steine nicht mehr verlieren und das Rechenhilfsmittel war leichter zu transportieren. Die Rubriken für Einer, Zehner usw. bis zum Bereich der Millionen waren mit römischen Ziffern markiert. Im oberen Drittel wies jede Rille eine Unterbrechung auf, denn eine Kugel in diesem Abschnitt hatte den Wert von fünf Kugeln im unteren Rillenteil. Somit kam man mit weniger Kugeln aus. Der römische Handabakus wurde hauptsächlich zum Summieren von Geldbeträgen benutzt. Die Grundeinheit des römischen Währungssystems, das As, lässt sich in zwölf Unzen einteilen. Deshalb gab es neben der Besetzung mit 4 + 1 Kugel auch Modelle bei denen die achte Rille 5 + 1 Kugeln trug. Mit der einzelnen oberen Kugel mit dem Wert „sechs“ kann man jetzt die zwölf Unzen darstellen.

Der römische Handabakus diente in vielen Regionen als Vorbild für eigene Entwicklungen. So findet man ihn als chinesisches Suan-pan, japanische Soroban oder russischer Stschoty.

Das chinesische **Suan-pan** ist ähnlich wie der römische Handabakus aufgebaut und wahrscheinlich durch den regen Handel auf der Seidenstraße nach China gelangt. Im Gegensatz zum römischen Handabakus trägt er unten fünf, oben zwei Kugeln. Damit lassen sich auf jedem Stab Werte von Null bis Fünfzehn darstellen. Dies hat den Vorteil, dass man einen Übertrag auf die nächste Stelle zunächst stehen lassen kann und erst in einem zweiten Schritt „bereinigt“. Dies erleichtert insbesondere den Vorgang der Division.

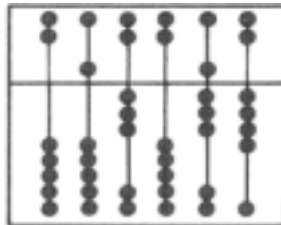


Abbildung 2: Chinesischer Suan-pan (aus [2])

Die japanische **Soroban** ist eine Weiterentwicklung der chinesischen Suan-pan. Die Kugeln sind jetzt Kegel, was die Bedienung dahingehend vereinfacht, dass man die Kugeln nicht mehr schieben, sondern nur noch mit den Fingerspitzen an die richtige Stelle zwischen zwei Kegeln tippen muss, um die Kegel an die gewünschte Position zu bewegen. Dadurch sparte man Zeit. Mitte des 19. Jahrhunderts verzichtete man auf den zweiten oberen Kegel und nach dem zweiten Weltkrieg auch auf den fünften unteren Kegel. Die einzelnen Rechenschritte wurden dadurch zwar komplizierter, da man ja keine Zwischenergebnisse mit Ziffern größer als 9 stehen lassen konnte, dafür brauchte man ein Ergebnis jetzt auch nicht mehr zu bereinigen.

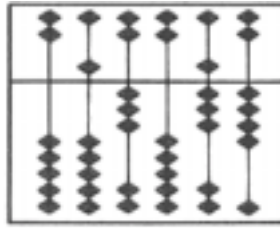


Abbildung 3: Japanischer Soroban (aus [2])

Die russische **Stschoty** ist auch heute noch in weiten Teilen Russlands, des Iran (unter dem Namen choreb) und der Türkei (unter dem Namen culba) verbreitet. Die beiden mittleren Kugeln sind farbig markiert, um die Lesbarkeit zu erhöhen. Der Stab mit nur vier Kugeln dient der Bruchrechnung mit Vierteln oder wird als Dezimalpunkt betrachtet, so dass die beiden darunter liegenden Stäbe jeweils die Zehntel bzw. Hundertstel (Kopeken) darstellen.

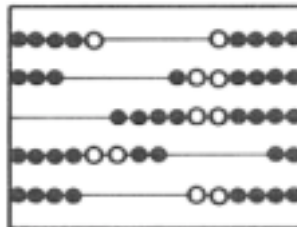


Abbildung 4: Russischer Stschoty (aus [2])

Während der napoleonischen Russlandfeldzüge gelangte der russische Stschoty als **Boullier** nach Metz, von wo aus er sich im 19. Jahrhundert über Frankreich und Deutschland ausbreitete. Hier wurde er aber hauptsächlich als Lehrmittel an Schulen eingesetzt.

Mit dem Zerfall des römischen Reiches verschwand auch der Handabakus aus weiten Teilen Europas. Der klassische Abakus jedoch blieb erhalten. Die Kunst mit ihm zu Rechnen vermittelten die mittelalterlichen Klöster. Durch die Weiterentwicklung der Rechensteine zu Steinen mit Zahlzeichen Ende des 10. Jahrhunderts wurde eine Brücke vom alten Abakus zu den im 13. Jahrhundert aufkommenden modernen Formen des Rechnens auf den Linien geschlagen. Die Bezeichnung „Rechnen auf den Linien“ macht den wesentlichen äußerlichen Unterschied dieses Rechenverfahrens zum Rechenbrett deutlich. Auf dem Abakus hatte man immer in Spalten gerechnet, also zwischen den Linien. Jetzt waren die Linien selbst Träger der Rechenmarke, ähnlich wie die Rillen des römischen Handabakus. Aber im Gegensatz zu diesen verliefen sie nicht vertikal, sondern horizontal wie die Zeilen eines Buches. Warum man diesen Schritt ging, lässt sich nicht mehr nachvollziehen. Die Linien staffelten sich von unten nach oben, von der kleinsten Einheit (Einer) zur größten. Auf den Linien wurden höchstens

vier Marken gelegt. Eine Marke zwischen den Linien hatte den fünffachen Wert der unter ihr liegenden Linie. Dadurch wurden, wie beim Handabakus, Rechenmarken gespart. Am bekanntesten wurden die Publikationen von Adam Ries zum Rechnen auf den Linien (aus [2] und [4]).

Rechnung auff der linien
gemacht durch Adam Riesen vonn Staffeln/
steyn/ in massen man es pflegt zu lern in allen
rechenschulen grundlich begriffen anno 1518.
vleysiglich vberlesen/ vnd zum andern mall
in trug vortfertiget.



¶ Gedruckt zu Erfordt zamt
Schwarzen Horn.
1527.

Abbildung 5: Titelblatt eines Rechenbüchleins von Adam Ries (aus [6])

2 Rechnen auf den Linien

2.1 Adam Ries – Wegbereiter des Linienrechnens

Adam Ries wurde 1492 in Staffelstein (Franken) geboren. Über seine Lebensdaten kann man in [1] nachlesen:

Ries lebte nach seinen Lehr- und Wanderjahren seit 1518 in Erfurt, unterrichtete dort als Rechenmeister und hatte Kontakte zur Universität ... In Erfurt verfasste Ries auch seine Rechenbücher, die er später ständig überarbeitete und die viele Auflagen erlebten.

1523 siedelte Ries nach Annaberg über. Hier gründete er eine eigene Rechenschule, die bald als 'große und berufene' Rechenschule bekannt wurde. Seit 1525 war er als Rezessschreiber angestellt; er hatte nun über die Ausbeute der Gruben für die Bergverwaltung Buch zu führen. 1532 wurde er herzoglicher Gegenschreiber, 1539 herzoglicher Hofmathematicus.

Neben der Wahrnehmung dieser und anderer Ämter führt Ries auch seine Rechenschule erfolgreich weiter. Seine Bücher waren bald weit verbreitet und wurden lange Zeit hindurch dem Unterricht vieler Schulen zugrunde gelegt, zumal sie in deutscher Sprache geschrieben waren. Die Aufgaben in den Rechenbüchern sind auf die Bedürfnisse der Kaufmannschaft und des Handwerks abgestimmt und allgemeinverständlich geschrieben. Aufbauend auf dem 'Rechnen auf den Linien', d.h. dem Rechnen mit den Rechenpfennigen, lehrte er im zweiten Buch auch das 'Rechnen auf der Feder', d.h. das schriftliche Rechnen mit arabischen Ziffern.



Abbildung 6: Adam Ries im Jahre 1550 (aus [1])

Übersicht über seine wichtigsten Publikationen

- 1518 erstes Rechenbuch „Rechnung auff der Linihen...“
- 1522 zweites Rechenbuch „Rechnung auff der Linihen vnnd Federn...“
- 1524 ersten Fassung der „Coß“
- 1533 Abfassung der „Annaberger Brotordnung“
- 1550 zweiten Fassung der „Coß“
- 1550 „Rechnung nach der lenge...“ (auch „Practica“ genannt)

2.2 Der Aufbau des Rechenbrettes

Hatten die Rechenbretter zunächst senkrechte Linien auf denen die Rechensteine abgelegt wurden, so entstand im Laufe der Zeit die Form, die bis ins 18. Jh. verwendet werden sollte und die auch Adam Ries nutzte.

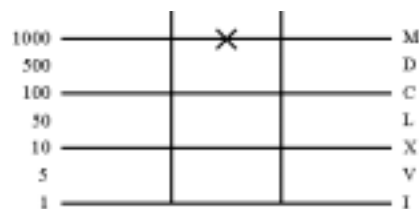


Abbildung 7: Rechenbrett

Auf dem Rechenbrett befinden sich mindestens vier waagerechte Linien, wobei diese von unten nach oben die Wertigkeit 1, 10, 100 und 1000 haben. Um Verwechslungen vorzubeugen befindet sich auf der Tausenderlinie ein Kreuz. Die Bereiche zwischen den Linien tragen die Bezeichnung „spacio“ und besitzen die Wertigkeit 5, 50 und 500. In der Regel findet man auf dem Abakus zwei senkrechte Linien, die das Rechenbrett in sog. „banckire“ teilen und zur Abgrenzung von Zahlen dienen.

2.3 Das Auslegen einer Zahl – Numeratio

Eine Zahl wird auf dem Rechenbrett durch Rechenpfennige ausgelegt. Liegen etwa zwei Rechenpfennig auf der Einerlinie, so bedeutet dies die Zahl 2, liegen die beiden Pfennige hingegen auf der Zehnerlinie, so stellen sie die Zahl 20 dar. Wird nun zusätzlich ein Rechenstein in den 500er spacio gelegt, so erhält man die Zahl 520.

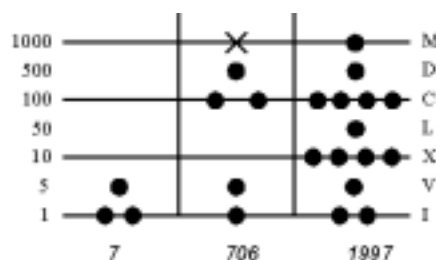


Abbildung 8: Darstellung von verschiedenen Zahlen

2.4 Rechenregeln – Elevatio und Resolvatio

Elevatio ist das Erhöhen von Rechensteinen (Bündeln). Ries beschreibt die Vorgänge wie folgt:

Erhöhung aus einer Linie	Erhöhung aus einem Spacio
„Liegen fünff rechenpfennig auff einer Linien so hebe die auff/ leg eine in das spacium darüber..." ([1], S. 3)	„Hastu aber zwen pfennig in einem spacio so heb die auff vnd leg einen auff die linie darüber." ([1], S. 3)

Tabelle 1: Rechenregeln zur Elevatio

Die Resolvatio, also das Aufbündlung von Rechensteinen findet bei Adam Ries folgende Erklärung:

Aufbündelung aus einer Linie	Aufbündelung aus einem Spacio
„Heb ihn auff leg einen in das nechst spacium darunter und 5 auff die linie vnder dem spacio" ([1], S. 3)	„Ligt aber ein pfennig in einem spacio ... so leg dafür 5 pfennig auff die linien darunter" ([1], S. 3)

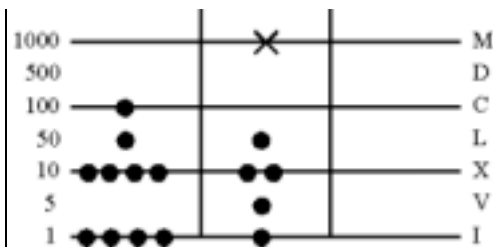
Tabelle 2: Rechenregeln zur Resolvatio

2.5 Addition

Die Addition zweier Zahlen läuft in drei Schritten ab und wird am Beispiel der Addition von $194 + 76$ gezeigt.

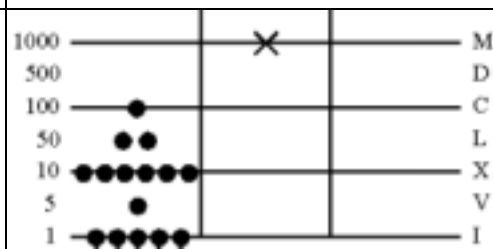
1. Numeratio

Auflegen der beiden Zahlen in die beiden ersten Bankiere,



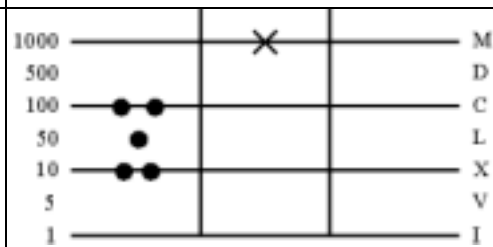
2. Addieren

Zusammenschieben der Rechenpfennige in das dritte Bankier,



3. Elevatio

Höherlegen eines Rechenpfennigs, sobald 5 auf einer Linie oder 2 in einem Spacio liegen,



4. Ergebnis ablesen

$194 + 76 = 270$

Tabelle 3: Addition

2.6 Subtraktion

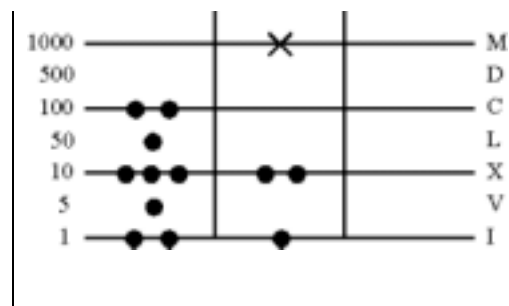
Die Subtraktion zweier Zahlen läuft analog zur Addition ab. Allerdings kann es passieren, dass nicht genügend Rechenpfennige auf einer Linie oder in einem Spacio vorhanden sind. Ist dies der Fall, so müssen mittels Resolution Rechenpfennige auf höheren Linien oder Spacio umgewandelt werden.

Beispiel 1 (ohne Resolution): $287 - 21 = ?$

1. Numeratio

Auflegen des Minuenden in das erste Bankier,

Hinweis: Es macht sich anfangs gut, dem Subtrahenden in das zweite Bankier zu legen.



<p>2. Subtraktion Entfernen der Anzahl Rechenpfennige, wie der Subtrahend angibt,</p>	
<p>3. Ergebnis ablesen 287 - 21 = 266</p>	

Tabelle 4: Subtraktion ohne Resolution

Beispiel 2 (mit Resolution): $287 - 43 = ?$

<p>1. Numeratio Auflegen des Minuenden in das erste Bankier, Hinweis: Es macht sich gut, dem Subtrahenden anfangs in das zweite Bankier zu legen.</p>	
<p>2. Resolution Resolution so, dass mindestens genau so viele Rechenpfennige im Minuenden-Spacio liegen, wie der Subtrahend angibt.</p>	
<p>3. Subtraktion Entfernen der Anzahl Rechenpfennige, wie der Subtrahend angibt,</p>	
<p>4. Ergebnis ablesen 287 - 43 = 244</p>	

Tabelle 5: Subtraktion mit Resolution

2.7 Multiplikation

Die Multiplikation zweier Zahlen wird zurückgeführt auf die mehrfache Addition. Dabei nutzt man alle Rechenvorteile. Eine Multiplikation mit 10 etwa bedeutet, dass die aufgelegten Rechenpfennige eine Linie bzw. ein Spacio nach oben geschoben werden.

Beispiel 1: $38 \cdot 123 = ?$

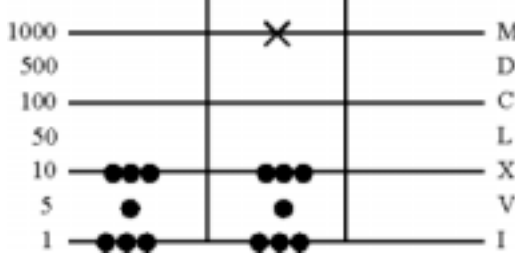
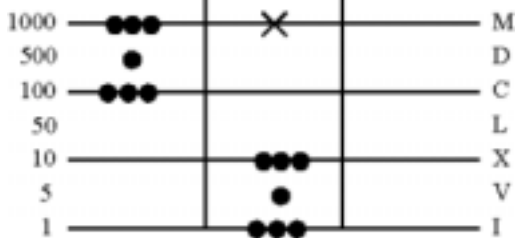
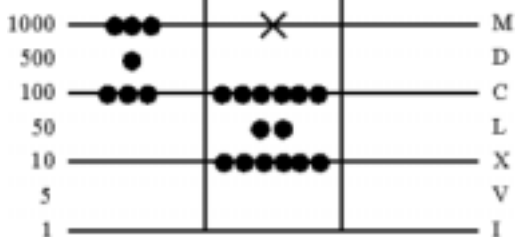
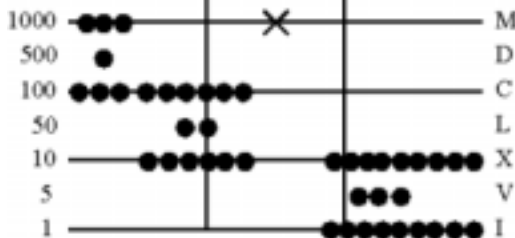
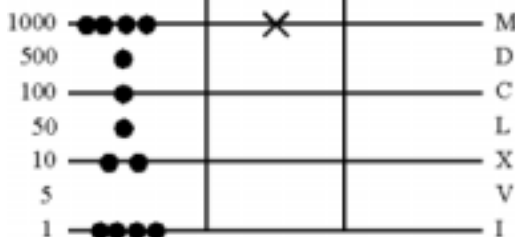
<p>1. Numeratio Auflegen des ersten Faktors, <i>Hinweis: Es macht sich gut, den ersten Faktor nochmals in das zweite Bankier zu legen.</i></p>	
<p>2. Multiplikation von 38 mit 100 Die Rechenpfennige werden 2 Zeilen nach oben geschoben,</p>	
<p>3. Multiplikation von 38 mit 20 Unter Nutzung der Rechenpfennige im zweiten Bankier werden diese verdoppelt, und eine Zeile nach oben geschoben und zu den vorhandenen Rechenpfennigen gezählt, <i>Hinweis: Es kann bereits hier eleviert werden.</i></p>	
<p>4. Multiplikation von 38 mit 3 Nach erneutem Auslegen der Zahl 38 wird diese verdreifacht (dreimaliges Auslegen) und zu den vorhandenen Rechenpfennigen geschoben, <i>Hinweis: Auch hier kann eleviert werden.</i></p>	
<p>5. Elevation und Ablesen des Ergebnisses $38 \cdot 123 = 4674$</p>	

Tabelle 6: Multiplikation

2.8 Division

Die Division wird bei Ries auf Subtraktion zurückgeführt, dass heißt, auf ein mehrfaches Subtrahieren des Divisors vom Dividenden. Dabei wird die Anzahl der Subtraktionen in einem Bankier gemerkt und stellt dann das Ergebnis dar. Ein einfaches Beispiel ($9 : 3 = ?$) soll verdeutlichen:

<p>1. Numeratio Auflegen des Dividenden, Merken des Divisors,</p>	
<p>2. Subtraktion von 3 Rechenpfennigen Drei Rechenpfennige werden aus dem Dividenden entfernt und dafür ein Rechenpfennig auf die Einerlinie gelegt,</p>	
<p>3. Resolution Resolution, so dass weitere Rechenpfennige von der Einerlinie entfernt werden können,</p>	
<p>4. Ergebnis ablesen Im dritten Bankier steht das Ergebnis der Division. Sollte ein Rest übrig bleiben, so wurde dieser früher auf die hohe Kante des Abakus gelegt.</p>	

Tabelle 7: einfache Division

Bei Division von mehrstelligen Zahlen ist in Analogie zur Multiplikation zur Verfahren. Es wird also über mehrfache Resolution versucht, möglichst früh den Divisor abzuziehen.

Hier ein erläuterndes Beispiel ($276 : 23 = ?$):

<p>1. Numeratio Auflegen des Dividenden, Merken des Divisors,</p>	
<p>2. Resolution des 50er-Spacio Es wird der 50er-Spacio resoliert, um anschließend 230 abzuziehen,</p>	
<p>3. Subtraktion von 230 Bei der Subtraktion wird das 10fache des Divisors abgezogen. Es muss also ein Rechenpfennig auf die Zehnerlinie gelegt werden.</p>	
<p>4. Resolution des 5er-Spacio und Subtraktion von 23</p>	
<p>5. Ergebnis ablesen $276 : 23 = 12$</p>	

Tabelle 8: Division

3 Zusammenfassung

Adam Ries versuchte mit seinen Beschreibungen des Rechnens auf den Linien die Grundrechenarten auch für das einfache Volk erlernbar zu machen. Die wenigen Grundregeln, die hohe Anschaulichkeit und die Rückführung der komplizierten Rechenoperationen Multiplikation und Division auf das einfachere Addieren und Subtrahieren ermöglichten es ihm, dies auch erfolgreich umzusetzen. Noch heute findet das Linien-Rechnen in Schulen seinen Einsatz. Das Adam-Ries-Museum in Annaberg bietet in der hauseigenen Rechenschule für alle interessierten Rechenkurse an.



Abbildung 9: Annaberger Rechenschule (aus [6])

Ries' größter Verdienst jedoch, liegt in der konsequenten Einführung und Benutzung der indo-arabischen Ziffern. Seine Rechenbücher, die das Rechnen mit der Feder beschrieben, führten letztlich zur Durchsetzung der neuen Zahlen in Deutschland und Europa, auch wenn Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) lieber auf den Linien als mit der Feder rechnete.

Die Beschäftigung mit dem Linienrechnen ist eine interessante Zeitreise zu den Anfängen der Rechentechnik und des Computers. Es sollte für jeden erlebbar sein.



Abbildung 10: Historische Darstellung des Linien- und Federrechnens (aus [2])

4 Anhang

4.1 Literaturverzeichnis

- [1] Peter Rochhaus: Rechnen mit dem Abakus. Eine Einleitung. Herausgegeben vom Museum Adam-Ries-Haus Annaberg-Buchholz, 1990
(= Der RechenMeister Nr. 1).
- [2] Heinz Glade, Karl Manteuffel: Am Anfang stand der ABAKUS - Aus der Kulturgeschichte der Rechengeräte. Berlin, Urania-Verlag, 1973.
- [3] Benjamin Wrightson: „Der Abakus - Geschichte und Funktionsweise“. URL: <http://home.t-online.de/home/benjamin.wrightson/abakus/abakfram.htm> [Stand: 18.03.2002].
- [4] Fachbereich mathematik der Universität Ulm: „Vom Abakus zur Staffelwalze“. URL: <http://www.mathematik.uni-ulm.de/fak/presse/staffel.html> [Stand: 18.03.2002]
- [5] Lexikon der Schulmathematik, herausgegeben von Athen/Bruhn, Bd. 3, Sonderausgabe des Weltbild-Verlags, 1990.
- [6] Adam-Ries-Bund: „Adam Ries – Annaberger Rechenschule“. URL: <http://www.adam-ries-bund.de/index.htm?ries.htm> [03.06.2003]

4.2 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Römischer Handabakus (aus [2]).....	3
Abbildung 2: Chinesischer Suan-pan (aus [2]).....	4
Abbildung 3: Japanischer Soroban (aus [2]).....	5
Abbildung 4: Russischer Stschoty (aus [2]).....	5
Abbildung 5: Titelblatt eines Rechenbüchleins von Adam Ries (aus [6]).....	6
Abbildung 6: Adam Ries im Jahre 1550 (aus [1]).....	7
Abbildung 7: Rechenbrett.....	8
Abbildung 8: Darstellung von verschiedenen Zahlen.....	8
Abbildung 9: Annaberger Rechenschule (aus [6]).....	15
Abbildung 10: Historische Darstellung des Linien- und Federrechnens (aus [2]).....	15

4.3 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Rechenregeln zur Elevatio.....	9
Tabelle 2: Rechenregeln zur Resolvatio.....	9
Tabelle 3: Addition.....	10
Tabelle 4: Subtraktion ohne Resolvatio.....	11
Tabelle 5: Subtraktion mit Resolution.....	11
Tabelle 6: Multiplikation.....	12
Tabelle 7: einfache Division.....	13
Tabelle 8: Division.....	14

4.4 Erklärung des Verfassers

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Facharbeit selbstständig verfasst und alle Formulierungen, die wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Quellen entnommen wurden, kenntlich gemacht habe.

Verwendete Informationen aus dem Internet sind dem(r) Lehrer/in vollständig im Ausdruck zur Verfügung gestellt worden, einschließlich der genauen Angabe der Internetadresse.

Sofern sich – auch zu einem späterem Zeitpunkt – herausstellt, dass die Arbeit oder Teile davon nicht selbstständig verfasst wurden, die Zitationshinweise fehlen oder Teile ohne Quellennachweis aus dem Internet entnommen wurden, so wird die Arbeit auch nachträglich mit null Punkten gewertet.

Ich erkläre mich damit einverstanden, dass die vorliegende Arbeit für schulische Zwecke benutzt werden kann.

Ribnitz-Damgarten, 11.06.2002

Max Mustermann